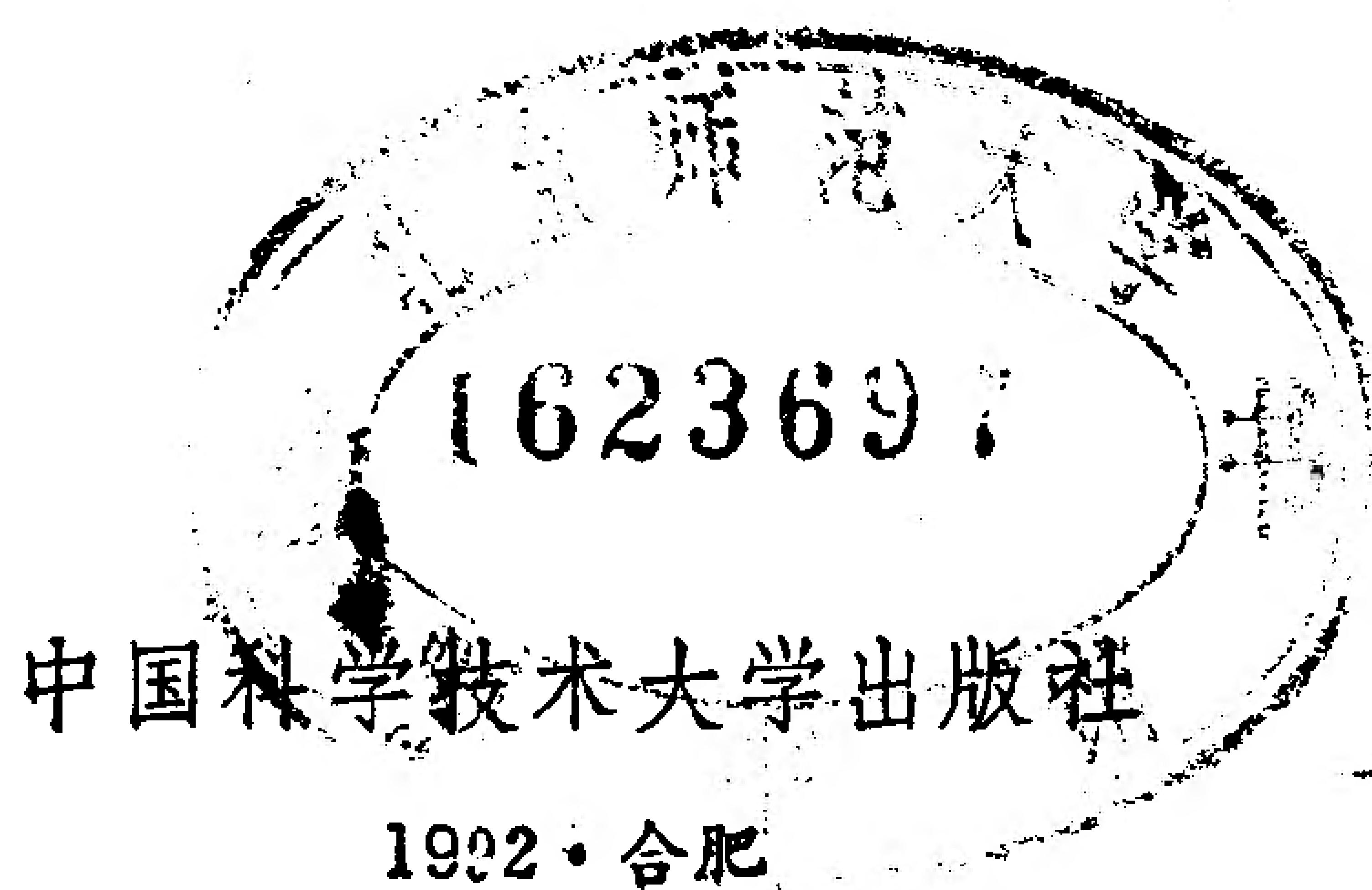
数学奥林匹克竞赛丛书

周 期 数 列

曹鸿德 徐洪泉

JY1/31/08



中国科学技术大学出版社

1992·合肥

[皖]新登字 08 号

周 期 数 列

曹鸿德 徐洪泉

*

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)

上海市印刷三厂排版

黄山市印刷总厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本 787×1092/32 印张 3.625 字数 78 千

1992 年 3 月第 1 版 1992 年 3 月第 1 次印刷

印数:1—8000 册

ISBN7—312—00318—4/G · 42

目　　次

第一章　周期数列

第二章　模周期数列

第一章　周期数列

1　预备知识

周期数列较多地涉及递推数列及其通项公式，因此在讲正文之前，先给出求递推数列通项公式的一些方法.

1°　先求 S_n，再求 a_n

例 1　设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n，且 $S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)(n\geqslant 1)$，试求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解　因为

$$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2),$$

所以

$$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right)\ (n\geqslant 2).$$

去分母，整理得

$$S_n^2=S_{n-1}^2+1\ (n\geqslant 2),$$

所以

$$S_n^2=S_1^2+(n-1)\ (n\geqslant 2).$$

又从 $S_1=\frac{1}{2}\left(S_1+\frac{1}{S_1}\right)$ $(S_1>0)$，解得 $S_1=1$，故有

$$S_n^2=n\ (n\geqslant 2).$$

因为　$S_1=1$ 适合上式，所以

$$S_n^2=n\ (n\geqslant 1).$$

因为　$\{a_n\}$ 是正项数列，$S_n>0(n\in N)$，所以

$$S_n=\sqrt{n},$$

所以

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\ (n\geqslant 2).$$

因为　$a_1=S_1=1$ 适合上式，所以

$$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\ (n\geqslant 1).$$

2°　商联乘相约原则和差叠加相消原则

例 2　数列$\{a_n\}$满足关系：$a_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-2})$ $(n>2)$，并且 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$. 求证

$$a_n=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\ (n\geqslant 2).$$

证　由已知

$$na_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}\ (n\geqslant 3), \tag{1}$$

$$(n-1)a_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-3}\ (n\geqslant 4), \tag{2}$$

(1)－(2)(将相邻两个递推式作差，我们称为差分法)，得

$$na_n-(n-1)a_{n-1}=a_{n-2}\ (n\geqslant 4),$$

整理得

$$n(a_n-a_{n-1})=-(a_{n-1}-a_{n-2}). \tag{3}$$

如果存在自然数 $n\geqslant 4$，使 $a_n-a_{n-1}=0$，则可通过(3)式，经过有限次倒退，得$a_3-a_2=0$. 但通过计算得$a_3=\frac{1}{3}$，$a_3-a_2=-\frac{1}{6}\neq 0$，矛盾，故对一切 $n\geqslant 4$ 的自然数 n，a_{n-1}

$-a_{n-2}\neq 0$. 这样就可从(3)式得

$$\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}=-\frac{1}{n}\quad (n\geqslant 4). \tag{4}$$

由(4)式，根据商联乘相约原则，得

$$a_n-a_{n-1}=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{a_{n-2}-a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_4-a_3}{a_3-a_2}\cdot(a_3-a_2)$$

$$=\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\quad (n\geqslant 4).$$

因为　$n=3$ 时上式也成立，所以

$$a_n-a_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}\quad (n\geqslant 3). \tag{5}$$

由(5)式，根据差叠加相消原则，得

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+a_2$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\quad (n\geqslant 3),$$

显然 $n=2$ 时，上式也成立，故求证的等式成立.

3° 数学归纳法

数学归纳法是求递推数列通项公式的最基本的方法.

例 3 实数列$\{a_n\}$定义如下：$a_0=a_1=1$，且

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}=2^n a_n\quad (n\geqslant 0). \tag{1}$$

(i)求通项公式a_n；

(ii)证明集合$\left\{b_n \mid b_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k,\ n\geqslant 0\right\}$是有界的；

(iii)求出和 $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)a_k$.

解 (i)从(1)容易解得 $a_2=\dfrac{1}{2!}$, $a_3=\dfrac{1}{3!}$, 我们猜想 $a_n=\dfrac{1}{n!}$ $(n\geqslant 0)$. 下面用数学归纳法证明.

归纳法的奠基成立;

假设 $n\leqslant k$ 时, 等式都成立, 则当 $n=k+1$ 时, 由(1)式得

$$\sum_{i=1}^{k} a_i a_{k+1-i}=(2^{k+1}-2)a_{k+1},$$

上式变形为

$$\frac{1}{(k+1)!}(C_{k+1}^1+C_{k+1}^2+\cdots+C_{k+1}^k)=(2^{k+1}-2)\cdot a_{k+1}.$$

因为

$$C_{k+1}^1+C_{k+1}^2+\cdots+C_{k+1}^k=2^{k+1}-2,$$

所以

$$a_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!},$$

即 $n=k+1$ 时, 等式也成立. 故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n!}$ $(n\geqslant 0)$.

我们顺便说一下本题的来源, 从等式

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}=2^n\cdot\frac{1}{n!}.$$

令 $a_k=\dfrac{1}{k!}$得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}=2^n a_n \quad ,$$

这就是问题中的递推公式.

(ii)因为

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&\leqslant 1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=3-\frac{1}{n}<3.\end{aligned}$$

又 $b_n\geqslant 1$，所以$\{b_n\}$是有界集合.

(iii)因为

$$(k-1)a_k=\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!},$$

所以

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right]\\&=1-\frac{1}{n!}\quad .\end{aligned}$$

4° 不动点

定义 1 设一元函数$f(x)$的定义域为D,且对每一$x\in D$,都有$f(x)\in D$. 若$x_1\in D$, $x_n=f(x_{n-1})(n\geqslant 2)$，则称$\{x_n\}$为由$f(x)$导出的递推数列，$f(x)$称为数列$\{x_n\}$的递推函数.

定义 2 在定义 1 的条件下，若存在点$x_0\in D$,使$f(x_0)$

$=x_0$，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的不动点．不动点的代数意义是方程 $f(x)=x$ 在定义域 D 中的解，其几何意义是直线 $y=x$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象交点的横坐标．

显然 $f(x)=x\Rightarrow f(f(x))=f(x)=x\Rightarrow\cdots$

$$\Rightarrow f(f(\cdots(f(x))))=x,$$

即 $f(x)$ 的不动点是 $f(f(\cdots(f(x))))$ 的不动点．

定理 1.1 一阶递性递推数列 $a_n=pa_{n-1}+q$（$p\neq1$，$q\neq0$，$n\geqslant2$）的通项公式为

$$a_n=x_0+(a_1-x_0)p^{n-1}\ (n\geqslant1),$$

其中 x_0 是递推函数 $f(x)=px+q$ 的不动点，即 $f(x)=px+q=x$ 的解 $x_0=\dfrac{q}{1-p}$．

特别地，当 $a_1=x_0=\dfrac{q}{1-p}$ 时，$a_n=\dfrac{q}{1-p}$（$n\geqslant1$），即 $\{a_n\}$ 是常数列．

例 4 设数列 a_1，a_2，…，a_n，…的前 n 项的和为 S_n，S_n 与 a_n 满足关系式 $S_n=-ba_n+1-\dfrac{1}{(1+b)^n}$，其中 b 是与 n 无关的常数，且 $b\neq-1$．

（i）求 a_n 与 a_{n-1} 的关系式；（ii）写出用 n 和 b 表示的 a_n 的表达式；（iii）当 $0<b<1$ 时，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$．

解

（i）由已知

$$S_n=-ba_n+1-\frac{1}{(1+b)^n}\ (n\geqslant1), \tag{1}$$

$$S_{n-1}=-ba_{n-1}+1-\frac{1}{(1+b)^{n-1}}\ (n\geqslant2), \tag{2}$$

（1）－（2），整理得 a_n 和 a_{n-1} 的关系式

$$(1+b)a_n=ba_{n-1}+\frac{b}{(1+b)^n}. \qquad (3)$$

（ii） $(3)\times(1+b)^{n-1}$，并设 $x_n=(1+b)^n a_n$，得

$$x_n=bx_{n-1}+\frac{b}{1+b}. \qquad (4)$$

如果 $b=1$，则由（4），得

$$x_n=x_{n-1}+\frac{1}{2},$$

$$x_n=x_1+\frac{1}{2}\cdot(n-1),$$

再由（1）解得 $a_1=\frac{1}{4}$，从而 $x_1=(1+b)a_1=\frac{1}{2}$， 故有

$$x_n=\frac{n}{2}, \quad a_n=\frac{n}{2^{n+1}}.$$

如果 $b\neq1$，则（4）的递推函数 $f(x)=bx+\frac{b}{1+b}$，令 $f(x)=x$，解得不动点 $x_0=\frac{b}{1-b^2}$. 由定理1得

$$x_n=\frac{b}{1-b^2}+\left(x_1-\frac{b}{1-b^2}\right)\cdot b^{n-1}.$$

因为

$$a_1=\frac{b}{(1+b)^2}, \quad x_1=(1+b)a_1=\frac{b}{1+b}.$$

所以

$$a_n=\frac{1}{(1+b)^n}\cdot x_n=\frac{b-b^{n+1}}{(1-b)(1+b)^{n+1}}.$$

所以

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{b-b^{n+1}}{(1-b)(1+b)^{n+1}}, & b\neq 1\\[2ex] \dfrac{n}{2^{n+1}}, & b=1.\end{cases}\qquad (5)$$

(iii) 由(1)和(5)，得

$$S_n=-\frac{b(b-b^{n+1})}{1-b}\cdot\frac{1}{(1+b)^{n+1}}+1-\frac{1}{(1+b)^n},$$

因为

$$0<b<1,\quad 0<\frac{1}{1+b}<1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

例 5 某粮站把一桶油的$\frac{q}{p}$又加$\frac{q}{p}$斤卖给第一个顾客，然后又把余下的油的$\frac{q}{p}$又加上$\frac{q}{p}$斤卖给第二个顾客，一直按这样的顺序卖下去，卖至第n个顾客正好全部卖完.若$\frac{q}{p}$是一个既约分数，且每个顾客所买到的油均为整数斤，那么(i)p、q满足什么关系式？(ii)这桶油的总重量为多少？

解 设这桶油的总重量为a_0，卖给第i个顾客a_i斤，余下b_i斤，($i=0, 1, 2, \cdots, n$)，这里的a_i和b_i都是整数，且$a_0=b_0$，$b_n=0$.

根据题意，我们有

$$a_k=\frac{q}{p}b_{k-1}+\frac{q}{p}\quad(1\leqslant k\leqslant n),\qquad(1)$$

$$b_{k-1}=a_k+b_k\quad(1\leqslant k\leqslant n),\qquad(2)$$

(2)代入(1)，整理得

$$b_k=\frac{p-q}{p}b_{k-1}-\frac{q}{p},$$

它的递推函数为 $f(x)=\frac{p-q}{p}x-\frac{q}{p}$，令 $f(x)=x$，解得不动点 $x_0=-1$，从而由定理 1

$$b_n=-1+(b_0+1)\left(\frac{p-q}{p}\right)^n.$$

因为

$$b_n=0,$$

所以

$$a_0=b_0=\left(\frac{p}{p-q}\right)^n-1. \tag{3}$$

因为

$$a_0\in \mathrm{N},$$

所以

$$\frac{p}{p-q}=m\in \mathrm{N}.$$

从上式解得 $\frac{q}{p}=\frac{m-1}{m}$. 因为 $(p,\ q)=1$，$(m,\ m-1)=1$，所以 $q=m-1$，$p=m$，从而得 p，q 的关系式

$$p-q=1.$$

（ii）由（3）得这桶油的总重量为

$$a_0=p^n-1.$$

定理 1.2 设线性分式递推数列

$$a_{n+1}=\frac{Aa_{n-1}+B}{Ca_{n-1}+D}\ (A,\ B,\ C,\ D\in \mathrm{R},\ ABC\neq 0)$$

的递推函数 $f(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D}$ 的两不动点为 x_1，x_2，且 $a_1\neq x_1$

或 x_2.

（i）若 $x_1\neq x_2$，则 $\dfrac{a_n-x_1}{a_n-x_2}=q\cdot\dfrac{a_{n-1}-x_1}{a_{n-1}-x_2}$；

（ii）若 $x_1=x_2$，则 $\dfrac{1}{a_n-x_1}=\dfrac{1}{a_{n-1}-x_1}+d$，

其中 $q=\dfrac{Cx_2+D}{Cx_1+D}$，$d=\dfrac{1}{Cx_1+D}$.

当 $a_1=x_1$ 或 $a_1=x_2$ 时，$a_n=x_1$ 或 $a_n=x_2(n\geqslant 1)$，即$\{a_n\}$是常数列.

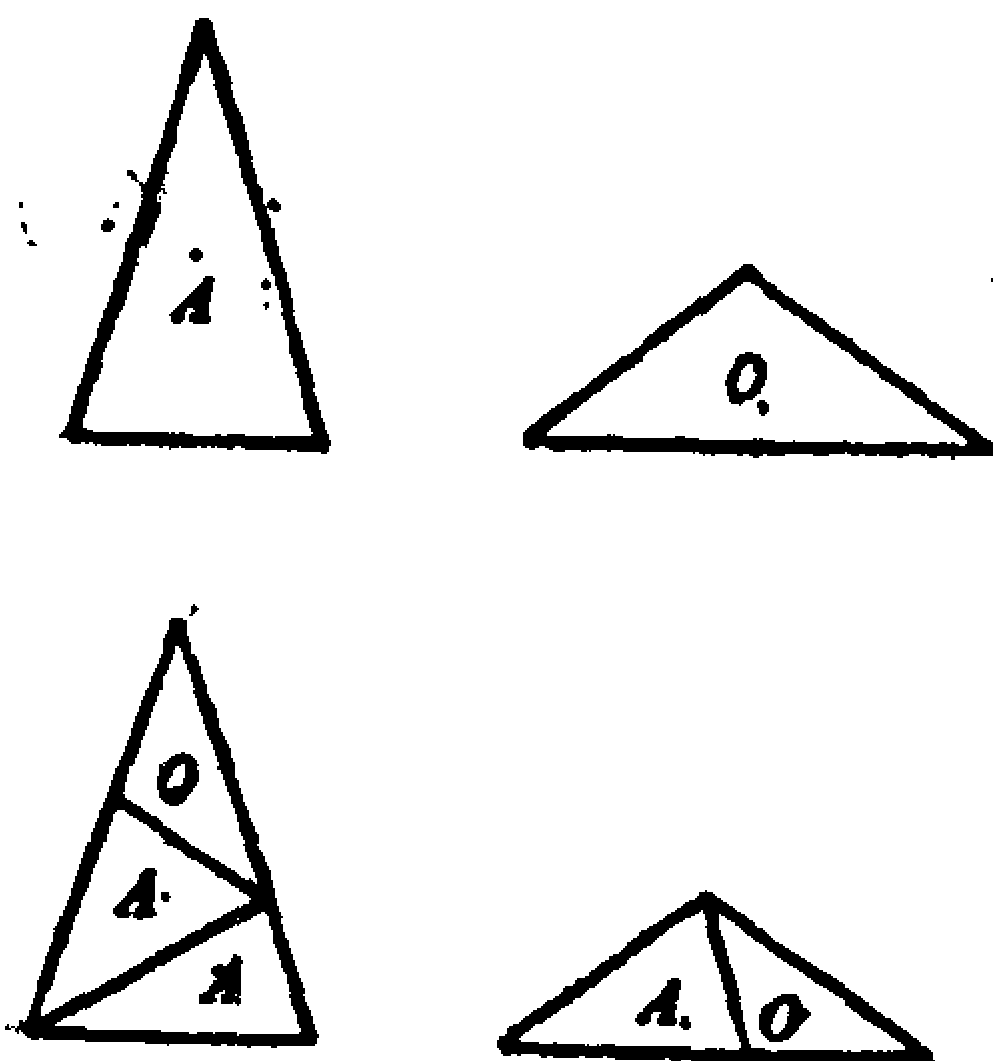


图 1

例 6 在平面上生活着两种生物：锐角三角形（A）和钝角三角形（O），它们都是等腰三角形. 锐角三角形的顶角为36°，钝角三角形的顶角为108°。

在每年的“大分日”，它们都分裂成小块：每个 A 分成两个小 A 和一个小 O；每个 O 分成一个小 A 和一个小 O. 在一年里，它们分别长大至成年. 很久之前，平面上仅有一个生物 O，而且在此平面上的生物是不会死亡的.

问：很久之后，锐角三角形 A 和钝角三角形 O 的数目的比率是否有一个极限？如果有，试确定此极限.

解 设第 n 年后锐角三角形（A）有a_n 个，钝角三角形（O）有b_n 个，它们的比率 $f_n=\dfrac{a_n}{b_n}$. 由已知 $a_0=0$，$b_0=1$，$f_0=0$，且

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1}+b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1}+b_{n-1} \end{aligned} \qquad (n\geqslant 1),$$

从而有

$$f_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{2a_{n-1}+b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}=\frac{2f_{n-1}+1}{f_{n-1}+1},$$

它的递推函数为 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$，令 $f(x)=x$，解得不动点 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.根据定理 2，易得

$$\frac{f_n-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{f_n-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{\dfrac{2f_{n-1}+1}{f_{n-1}+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{2f_{n-1}+1}{f_{n-1}+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2\cdot\frac{f_{n-1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{f_{n-1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^{2^n}.$$

因为

$$0<\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+2}<1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{f_n-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} f_n=\frac{1+\sqrt{5}}{1}.$$

5° 特征方程和特征根

定义 3 如果数列$\{a_n\}$满足

$$a_{n+r}=C_1a_{n+r-1}+C_2a_{n+r-2}+\cdots+C_ra_n \quad (n\geqslant 0),$$

其中C_1, C_2, …, C_r为常数，$C_r\neq 0$，则称$\{a_n\}$为r阶线性递推数列，并称方程

$$x^r=C_1x^{r-1}+C_2x^{r-2}+\cdots+C_{r-1}x+C_r$$

为它的特征方程，这个方程的r个根称为这个数列的特征根.

定理 1.3 对于r阶线性递推数列

$$a_{n+r}=C_1a_{n+r-1}+C_2a_{n+r-2}+\cdots+C_{r-1}x+C_r$$
$$(C_r\neq 0,\ n\geqslant 0),$$

(i)如果它的特征方程有r个不同的特征根x_1, x_2, …, x_r, 则

$$a_n=\lambda_1x_1^n+\lambda_2x_2^n+\cdots+\lambda_rx_r^n \quad (n\geqslant 0),$$

其中λ_1, λ_2, …, λ_r由数列的前r项a_0, a_1, …, a_{r-1}所待定;

(ii)如果它的特征方程有$S(S<r)$个不同的根$x_1, x_2, \cdots, x_S$, 它们的重数分别是t_1, t_2, …, t_S, 这里$t_1+t_2+\cdots+t_S=r$, 则

$$a_n=P_1(n)x_1^n+P_2(n)x_2^n+\cdots+P_S(n)x_S^n \quad (n\geqslant 0),$$

其中$P_i(n)$分别是n的次数不超过t_i-1的多项式$(1\leqslant i\leqslant S)$，它们由数列的前$r$项所待定.

例 7 已知数列$\{a_n\}$满足: $a_1=0$,

$$a_{n+1}=5a_n+\sqrt{24a_n^2+1} \quad (n\geqslant 1). \qquad (1)$$

试求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 将(1)式平方，整理得

$$a_{n+1}^2-10a_n\cdot a_{n+1}+(a_n^2-1)=0. \qquad (2)$$

调换(2)式的下标，整理得

$$a_{n-1}^2-10a_n\cdot a_{n-1}+(a_n^2-1)=0. \qquad (3)$$

从(2)、(3)两式看出，a_{n+1}和a_{n-1}是方程

$$t^2-10a_nt+(a_n^2-1)=0.$$

的两根，从而有

$$a_{n+1}=10a_n-a_{n-1}\ (n\geqslant 2) \qquad (4)$$

(4)的特征方程是 $x^2-10x+1=0$，两特征根为 $x=5\pm 2\sqrt{6}$，故可设

$$a_n=\lambda_1(5+2\sqrt{6})^n+\lambda_2(5-2\sqrt{6})^n.$$

因为

$$a_1=0,\ a_2=1,$$

所以

$$\lambda_1(5+2\sqrt{6})+\lambda_2(5-2\sqrt{6})=0,$$

$$\lambda_1(5+2\sqrt{6})^2+\lambda_2(5-2\sqrt{6})^2=1,$$

解得

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{6}}{24}(5-2\sqrt{6}),\quad \lambda_2=-\frac{\sqrt{6}}{24}(5+2\sqrt{6}).$$

所以

$$a_n=\frac{\sqrt{6}}{24}[(5+2\sqrt{6})^{n-1}-(5-2\sqrt{6})^{n-1}].$$

此外，从(4)式出发，我们可以用数学归纳法证明：对一切自然数n，a_n是整数.

例 8 问自然数 n 是何值时,

$$(x^2+x+1)\mid[x^{2n}+1+(x+1)^{2n}].$$

解 因为 $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}=(x^2)^n+1^n+[(x+1)^2]^n$ 类似三阶线性递推数列的通项公式，所以可设

$$a_n=x^{2n}+1+(x+1)^{2n}. \tag{1}$$

如令 $a_1=x^2+1+(x+1)^2$, $a_2=x^4+1+(x+1)^4$, $a_3=x^6+1+(x+1)^6$, 则通项公式(1)所对应的递推数列的三个特征根为 x^2, 1, $(x+1)^2$ (不失一般性，可设 $x\neq 0$, $x\neq 1$), 因此所对应的特征方程为

$$(\lambda-x^2)(\lambda-1)(\lambda-(x+1)^2]=0,$$

展开得

$$\lambda^3=2(x^2+x+1)\lambda^2-(x^2+x+1)^2\lambda+x^2(x+1)^2,$$

故 $\{a_n\}$ 所满足的递推式为

$$\begin{aligned}a_n=&2(x^2+x+1)a_{n-1}-(x^2+x+1)^2a_{n-2}\\&+x^2(x+1)^2a_{n-3}\ (n\geqslant 4).\end{aligned} \tag{2}$$

因为

$$a_1=x^2+1+(x+1)^2=2(x^2+x+1),$$

$$a_2=x^4+1+(x+1)^4=2(x^2+x+1)^2,$$

$$\begin{aligned}a_3&=x^6+1+(x+1)^6=(x^6-1)+[(x^2+x+1)+x]^3+2\\&=(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)+(x^2+x+1)^3\\&\quad+3(x^2+x+1)^2\cdot x+3(x^2+x+1)x^2+x^3+2,\end{aligned}$$

所以

$$(x^2+x+1)\mid a_1,\ (x^2+x+1)\mid a_2,$$

$$(x^2+x+1)\nmid a_3.$$

所以由(2)式可知

$$(x^2+x+1)\mid a_4,\ (x^2+x+1)\mid a_5,\ (x^2+x+1)\nmid a_6.$$

用数学归纳法及(2)不难证明下面的结论.

$$(x^2+x+1) \mid a_{3n-2}, \quad (x^2+x+1) \mid a_{3n-1},$$
$$(x^2+x+1) \nmid a_{3n} \quad (n \geqslant 1),$$
即当且仅当 $3 \nmid n$ 时，有 $(x^2+x+1) \mid [x^{2n}+1+(x+1)^{2n}]$.

本题的技巧在于从数列的通项公式导出其递推公式，值得玩味.

2 基本概念

提到周期数列，人们自然会想到周期函数的概念. 周期函数定义为：如果存在常数 $T \neq 0$，使得对函数 $f(x)$ 的定义域中的每一 x，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的周期. T 的最小正值称为最小正周期(简称为周期).

我们现在感兴趣的是，$f(x)$ 为定义在整数集合（或其子集）上的离散函数（即所谓的数列），这样的周期函数便称为周期数列. 为了完整起见，我们重述一下其定义（改记 $f(n)$ 为 a_n）.

定义 对于数列 $\{a_n\}$，若存在一个(固定的)自然数 T. 使得从它的第 N 项起，恒有

$$a_{n+T}=a_n.$$

成立，则称数列 $\{a_n\}$ 为从第 N 项起的周期为 T 的周期数列. T 的最小值称为最小周期，简称为周期. 以后若无特别说明，所谓周期均指最小周期. 当 $N=1$ 时，称 $\{a_n\}$ 为纯周期数列；当 $N \geqslant 2$ 时，称为混周期数列.

例如，$\{i^n (n \in \mathrm{N})\}$ 是周期为 4 的纯周期数列（i 是虚数单位），$\{\cos n\pi (n \in \mathrm{N})\}$ 是周期为 2 的纯周期数列.

与周期函数一个显著的不同点是，一般的周期函数不一定有最小正周期(如任意非零实数都是常数函数的周期)，但根据定义，周期数列必有最小(正)周期.

定理 2.1 周期数列的值域必是有限数集.

证 设数列$\{a_n\}$是从第N项起的周期为T的周期数列，则由定义

$$a_n\in\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{N-1},\ a_N,\ a_{N+1},\ \cdots,\ a_{N+T-1}\}\quad(n\in\mathrm{N}),$$

即数列$\{a_n\}$的值域是有限数集.

推论 1 若周期数列$\{a_n\}$的周期$T\geqslant 2$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在.

下面是它的逆否命题.

推论 2 若$\{a_n\}$不是常数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，则$\{a_n\}$必定不是周期数列.

考察数列 1，2，1，2，2，1，2，2，2，1，2，2，2，2，1，…，它的值域是$\{1,\ 2\}$，但不是周期数列，即定理2.1的逆命题不成立. 我们自然要问，值域是有限数集的数列，再加上什么条件才能成为周期数列？下面的定理是这方面的一个结果.

定理 2.2 值域是有限数集的递推数列是周期数列.

证 设数列$\{a_n\}$的值域是一有限数集D，且满足

$$a_{n+r}=f(a_{n+r-1},\ a_{n+r-2},\ \cdots,\ a_n)\quad(n\geqslant 1),$$

其中递推函数f是$D\to D$的r元函数，$D=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_M\}$.

考察有序数组

$$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r),\ (a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{r+1}),\ \cdots,$$

$(a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+r-1}), \cdots,$ (1)

并且规定，当且仅当 $a_m=a_n$, $a_{m+1}=a_{n+1}$, $\cdots$, $a_{m+r-1}=a_{n+r-1}$ 时，$(a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+r-1})=(a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+r-1})$ $(n\geqslant 1, m\geqslant 1)$.

显而易见，在有序数组(1)中不相同的至多有 M^r 个. 由抽屉原则可知，有序数组(1)的前 M^r+1 个中至少有两个是相等的. 不妨设

$$(a_N, a_{N+1}, \cdots, a_{N+r-1})=(a_{N+T}, a_{N+1+T}, \cdots, a_{N+r-1+T}),$$

从而有 $a_{N+T}=a_N$, $a_{N+1+T}=a_{N+1}$, $\cdots$, $a_{N+r-1+T}=a_{N+r-1}$

$$(N+r-1+T\leqslant M^r+1).$$

下面用数学归纳法证明，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $a_{n+T}=a_n$ 成立.

归纳法的奠基成立：

假设 $n\leqslant k(k\geqslant N+r-1)$ 时，$a_{n+T}=a_n$ 都成立. 由于

$$\begin{aligned} a_{k+1+T} &= f(a_{k+T}, a_{k+T-1}, \cdots, a_{k+T-r+1}) \\ &= f(a_k, a_{k-1}, \cdots, a_{k+T-1}) \\ &= a_{k+1}, \end{aligned}$$

故 $n=k+1$ 时，命题也成立. 这样，对一切 $n\geqslant N$ 的自然数 n, $a_{n+T}=a_n$ 都成立，即数列 $\{a_n\}$ 是对第 N 项起的周期为 T 的周期数列.

定理 2.3 若 T 是周期数列 $\{a_n\}$ 的最小周期，T' 是 $\{a_n\}$ 的另一个周期，则 $T|T'$，即 $T'=kT(k>1)$.

证 设 $\{a_n\}$ 是从第 N 项起的周期数列，即对一切 $n\geqslant N$ 的自然数 n，恒有

$$a_{n+T}=a_n$$

假设 $T\nmid T'$，即有 $T'=qT+r$ $(r=1, 2, \cdots, T-1)$. 由已知

$$a_{n+T'}=a_n,$$

$$a_{n+qT+r}=a_{n+T'}=a_{n+r},$$

故有

$$a_{n+r}=a_n$$

对一切 $n\geqslant N$ 的自然数 n 都成立，即 r 也是$\{a_n\}$的一个周期，这与所设 T 是$\{a_n\}$的最小周期矛盾，故 $T|T'$.

定理 2.4 若数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是周期数列，则数列 $\{a_n\pm b_n\}$，$\{a_nb_n\}$，$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b_n\neq 0)$ 也是周期数列.

证 我们选一证之，其余的留给读者.

设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别是从第 N_1 项和第 N_2 项起的，周期分别是 T_1 和 T_2 的周期数列，则当 $n\geqslant \max\{N_1, N_2\}$时，恒有

$$a_{n+[T_1,T_2]}\pm b_{n+[T_1,T_2]}=a_n\pm b_n$$

成立，其中 $[T_1, T_2]$ 是 T_1，T_2 的最小公倍数，故数列 $\{a_n\pm b_n\}$是周期数列，其最小周期 $T|[T_1, T_2]$.

定理 2.5 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足 $b_n=f(a_n)$，其中f有反函数存在，则$\{b_n\}$是周期数列的充要条件是 $\{a_n\}$ 为周期数列，且两数列的周期相等.

证 必要性 设 $\{b_n\}$ 是从第 N 项起的周期为 T 的周期数列. 由已知

$$a_n=f^{-1}(b_n),$$

从而有

$$a_{n+T}=f^{-1}(b_{n+T})=f^{-1}(b_n)=a_n \quad (n\geqslant N),$$

即 $\{a_n\}$ 也是从第 N 项起的周期数列，它的最小周期 $T'|T$. 反过来，由于

$$b_{n+T'}=f(a_{n+T'})=f(a_n)=b_n,$$

即 T' 也是 $\{b_n\}$ 的一个周期，故有 $T|T'$. 这样就得到$T=T'$.

必要性得证.

充分性的证明是类似的，留给读者.

例 1 设 f 是从集合 $M=\{1, 2, \cdots, 1988\}$ 到 M 的映射，定义

$$x_1=f(1),\ x_{n+1}=f(x_n),\ n=1, 2, 3, \cdots.$$

问是否存在一个整数 m，使 $x_{2m}=x_m$?

解 仿照定理2.2的证明，可以证明数列 $\{x_n\}$ 是从第 N 项起的周期为 T 的周期数列，即对一切 $n\geqslant N$ 自然数 n，恒有

$$x_{n+T}=x_n$$

成立.

如果 $N\leqslant T$，在 $x_{n+T}=x_n$ 中取 $m=n=T$，则有 $x_{2m}=x_m$；如果 $N>T$，则 $N\leqslant NT$. 因为 $x_{n+NT}=x_n$，故可取 $m=n=NT$，使 $x_{2m}=x_m$.

例 2 定义数列 $\{x_n\}$：$x_0=a\ (0\leqslant a\leqslant 1)$,

$$x_{n+1}=2x_n(1-x_n)\quad (n\geqslant 0), \qquad (1)$$

试判断 $\{x_n\}$ 是否为周期是2的周期数列.

解 假设 $\{x_n\}$ 是从第 N 项起的周期为2的周期数列，则有 $x_{N+2}=x_N$，从而有

$$\begin{aligned} x_{N+2}&=2x_{N+1}-2x_{N+1}^2\\ &=2(2x_N-2x_N^2)-2(2x_N-2x_N^2)^2=x_N, \end{aligned}$$

整理得

$$x_N(2x_N-1)(4x_N^2-6x_N+3)=0.$$

因为 $4x_N^2-6x_N+3>0$ 恒成立，所以 $x_N=0$ 或 $x_N=\frac{1}{2}$. 由(1)式，当 $x_N=0$ 时，可用数学归纳法证明 $x_n=0(n\geqslant N)$.

同理，当 $x_N=\frac{1}{2}$ 时，可证 $x_n=\frac{1}{2}$ $(n\geqslant N)$ 成立．也就是说当 $x_N=0$ 或 $x_N=\frac{1}{2}$ 时，$\{x_n\}$ 是从第 N 项起的周期为 1 的周期数列，这与所设矛盾，因此 $\{x_n\}$ 不可能是周期为 2 的周期数列．

本题也可这样解：若 $x_0=0$，$\frac{1}{2}$ 或 1，则 $x_n=0$、$x_n=\frac{1}{2}$ 或 $x_n=0$ 对一切自然数 n 成立，即 $\{x_n\}$ 是常数列．当 $0<x_0<\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<x_0<1$ 时，我们可以证明 $\{x_n\}$ 单调有界，因而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$．利用定理 2.1 的推论 2 可知 $\{x_n\}$ 不是周期数列．综上所述，$\{x_n\}$ 不是周期为 2 的周期数列．

例 3 设 a 是一个自然数，$f(a)$ 是 a 的各位数字的平方和．定义数列 $\{a_n\}$：a_1 是不超过三位的自然数，$a_n=f(a_{n-1})$ $(n\geqslant 2)$．试证：不论 a_1 取何值，数列 $\{a_n\}$ 是周期数列．

证 $a_1\leqslant 999$，$a_2\leqslant 9^2+9^2+9^2=243$，可用数学归纳法证明 $1\leqslant a_n\leqslant 999$ $(n\geqslant 1)$，即 $\{a_n\}$ 的值域为一有限数集，又 $a_n=f(a_{n-1})$ $(n\geqslant 2)$，故由定理 2.2 可知 $\{a_n\}$ 是周期数列．

如令 $a_1=3$，则 $a_2=9$，$a_3=81$，$a_4=65$，$a_5=61$，$a_6=37$，$a_7=58$，$a_8=89$，$a_9=145$，$a_{10}=42$，$a_{11}=20$，$a_{12}=4$，$a_{13}=16$，$a_{14}=37$，…，即当 $a_1=3$ 时，$\{a_n\}$ 是从第 6 项起的周期为 8 的周期数列．

本例是下例的特殊情形．

例 4 随意写一个十进制的自然数(如2583)，然后求这

数的各个数码的平方和($2^2+5^2+8^2+3^2=102$)，对得到的数(102)再用这种方法处理($1^2+0^2+2^2=5$)，并如此进行下去($5^2=25$，$2^2+5^2=29$，$2^2+9^2=85$，…).

证明：如果这个过程不把原来的数变成1(1的平方还是1，所以以后永远是1)，就必然会变成145，然后便出现145，42，20，4，16，37，58，89这样一个周期循环.（见史坦因豪斯《一百个数学问题》，上海教育出版社.）

证 我们用

$$L_0=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_3\cdot 10^2+a_2\cdot 10+a_1$$

表示一个任意 n 位的自然数，用

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ \cdots,\ L_n,\ \cdots \tag{1}$$

表示由 L_0 产生的逐次各位数码平方和的数列.

设 $f(a)$ 是自然数 a 的各位数码平方和，则

$$L_n=f(L_{n-1})\quad (n\geqslant 1).$$

因为 $L_n\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ \underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}}\}$ $(n\geqslant 0)$，所以由定理2.2可知数列 $\{L_n\}$ $(n\geqslant 0)$ 是周期数列.

因为 $L_1=a_n^2+a_{n-1}^2+\cdots+a_3^2+a_2^2+a_1^2$，所以我们有

$$\begin{aligned}L_0-L_1=&(10^{n-1}-a_n)\cdot a_n+(10^{n-2}-a_{n-1})a_{n-1}+\cdots\\&+(10^3-a_4)a_4+(10^2-a_3)a_3\\&+(10-a_2)a_2-(a_1-1)a_1.\end{aligned}$$

不难看出

$$(a_1-1)a_1\leqslant 72,$$

而且当 $n\geqslant 3$ $(a_n\neq 0)$ 时，

$$(10^{n-1}-a_n)a_n\geqslant 99,$$

还有

$$(10^{i-1}-a_i)a_i\geqslant 0\ (i=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1),$$

所以

$$L_0>L_1.$$

由这个不等式的证明过程可知，当数列(1)的各项还是不小于三位数之前，后面的项恒小于前面的项，即数列(1)的这一部分是递减的．所以任意一个大于三位的数L_0，经过$L_n=f(L_{n-1})$，进行若干次递推之后，必定会变成一个不大于三位的数．因此，要判断本题的论点是否正确，只要研究L_0是三位数这种情况就可以了．

设 $L_0=a_3\cdot 10^2+a_2\cdot 10+a_1\ (a_3\neq 0)$，则

$$L_1=a_3^2+a_2^2+a_1^2,$$

从而有

$$L_0-L_1=(100-a_3)a_3+(10-a_2)a_2-(a_1-1)a_1$$
$$\geqslant 99-72=27,$$

即有

$$L_1\leqslant L_0-27,$$

同理 $L_2\leqslant L_1-27$，$L_3\leqslant L_2-27$，…，故数列(1)中的某个项必是一个二位数．不妨设这个项为

$$L_q=10j+k.$$

因为把 L_q 改成 $10k+j$，它的后续各项

$$L_{q+1},\ L_{q+2},L_{q+3},\ \cdots$$

不变，所以可在 L_q 中令 $j\geqslant k\geqslant 0$，$j\geqslant 1$．

当 $L_q=10j+k$，$j\geqslant k\geqslant 0$，$j\geqslant 1$ 时，L_{q+1} 是表1中的某个数．

我们把表中符合本题的数舍去．先舍去

1，10，100，(它们的后续各项均为1)

以及

145，42，20，4，16，37，58，89

表 1

L_{q+1} k \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2								
2	4	5	8							
3	9	10	13	18						
4	16	17	20	25	32					
5	25	26	29	34	41	50				
6	36	37	40	45	52	61	72			
7	49	50	53	58	65	74	85	98		
8	64	65	68	73	80	89	100	113	128	
9	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162

(这是因为只要出现上述 8 个数中的一个数，那么，它的后续各项就会出现上述 8 个数的周期循环). 此外还可舍去

2，40，50，52，61，73，80，81，85，90，98，130

这些数，因为这些数和前面舍去的数以及和表中余下的数的区别只是数码的排列不同或只多一个数码 0 而已. 这样用来检验这个定理是否正确的数只剩下28个了，它们是

5，8，9，13，17，18，25，26，29，32，34，36，41，45，49，53，64，65，68，72，74，82，97，106，113，117，128，162.

我们对这28个数列表检验. 表 2 的第一栏是被检验的数，第二栏是这个数的后续各项，直至出现最前面被舍去的11个数中的一个数为至. 这也是说，定理的结论成立.

我们不一一检验了，但指出用来被验证的各数，最终都能变成 1 或145，42，20，4，16，37，58，89当中的一个，

表 2

5	25，29，85，89
8	64，52，37
9	81，65 61，37
18	65，61，37
32	13，10
36	45，41，17，50，25，29，85，89
49	97，130，10
…	……

而一旦出现其中的一个数，这个数的后续各项将会出现周期循环，因此本题的结论成立.

下面这个例子，虽不属于周期数列的范畴，但它是用周期性思想去解决的.

例 5 从2与7开始，数列2，7，1，4，7，4，2,8，…的造法是，把这个数列相邻的前二项相乘，如果得到一个个位数，此数即作为第三项；如果得到二位数，则此二位数的二个位上的数依次作为第三、第四项，以此类推. 证明数字6在上述数列中出现无穷多次.

证 观察此数列的前几项：2，7，1，4，7，4，2，8，2，8，8，1，6，1，6，1，6，…. 按照此数列的构造方法，从数列中第一次出现的连续四项2，8，2，8进行递推，得到数列中出现数字6的情况是

$$2,\ 8,\ 2,\ 8\Rightarrow\cdots$$
$$\Rightarrow 1,\ 6,\ 1,\ 6,\ 1,\ 6\Rightarrow\cdots$$
$$\Rightarrow 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6\Rightarrow\cdots$$
$$\Rightarrow 3,\ 6,\ 3,\ 6,\ \cdots,\ 3,\ 6\Rightarrow\cdots$$
$$\Rightarrow 1,\ 8,\ 1,\ 8,\ \cdots,\ 1,\ 8\Rightarrow\cdots$$
$$\Rightarrow 8,\ 8,\ 8,\ \cdots,\ 8\Rightarrow\cdots$$

$$\Rightarrow 6,\ 4,\ 6,\ 4,\ \cdots,\ 6,\ 4 \Rightarrow \cdots$$
$$\Rightarrow 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2,\ 4 \Rightarrow \cdots$$
$$\Rightarrow 8,\ 8,\ 8,\ \cdots,\ 8 \Rightarrow \cdots$$
$$\Rightarrow 6,\ 4,\ 6,\ 4,\ \cdots,\ 6,\ 4 \Rightarrow \cdots$$

从上述递推过程，我们可以看出，由6，4，6，4，…，6，4⇒6，4，6，4，…，6，4⇒…的“周期”——我们的想象——为 3，而且每经过一个“周期”，含“6，4”的项在增多，因此数字 6 在上述数列中出现无穷多次.

3 判定周期性的方法

1° 从递推式导出周期性

例 1 选定整数序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，使得

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \ (n \geqslant 3).$$

如果前 1492 项的和是 1985，而前 1985 项的和是 1492，那么前 2001 项的和是多少？

解 设 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和，则由已知

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \\ &= (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_{n-2} - a_{n-3}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_2 + a_1 \\ &= a_{n-1} + a_2. \end{aligned} \tag{1}$$

因为

$$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} = -a_n,$$

所以

$$a_{n+6} = -a_{n+3} = -(-a_n) = a_n \ (n \geqslant 1), \tag{2}$$

所以 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的纯周期数列.

由(1)、(2)及已知，得

$$S_{1492} = a_{1491} + a_2 = a_3 + a_2 = 1985,$$

$$S_{1985}=a_{1984}+a_2=a_4+a_2=a_3=1492,$$

所以

$$a_2=493,$$

所以

$$S_{2001}=a_{2000}+a_2=a_2+a_2=986.$$

例 2 有一个数列 x_1, x_2, …, x_n, …, 已知其中任何连续三项之和为 20, 并且 $x_4=9$, $x_{12}=7$, 求 x_{2000} 的值.

解 由已知

$$x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}=20,$$
$$x_n+x_{n+1}+x_{n+2}=20,$$

两式相减，得

$$x_{n+3}=x_n \quad (n\geqslant 1),$$

故 $\{x_n\}$ 是周期为 3 的纯周期数列, 从而有 $x_4=x_1=9$, $x_{12}=x_3=7$. 因为

$$x_1+x_2+x_3=20,$$

所以

$$x_2=4,\quad x_{2000}=x_2=4.$$

例 3 数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_2 是方程 $z^2+iz-1=0$ 的两根。当 $n\geqslant 2$ 时, 有

$$(a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2)+i(a_{n+1}+a_{n-1}-2a_n)=0. \qquad (1)$$

求证：对一切自然数 n, 都有

$$a_n^2+a_{n+1}^2+a_{n+2}^2=a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}a_n.$$

证 从 $z^2+iz-1=0$ 解得

$$z=\frac{-i+\sqrt{3}}{2}=i\,\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},$$

故不妨设 $a_1=i\bar{\omega}$, $a_2=i\omega$, 其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega^2+\omega$

其中 $A=\frac{a_1-\mathrm{i}}{a_1+\mathrm{i}}$，故数列$\left\{\frac{a_n-\mathrm{i}}{a_n+\mathrm{i}}\right\}$是周期为4的纯周期数列，再由定理2.5推得$\{a_n\}$也是周期为4的纯周期数列.

对于一般情况下的线性分式递推数列，我们有下面定理.

定理3.1 设线性分式递推数列

$$a_{n+1}=\frac{Aa_{n-1}+B}{Ca_{n-1}+D}(\text{常数 } A,\ B,\ C,\ D\in R,\ ABC\neq 0)$$

的两不动点为 x_1，x_2.

（i）当 $a_1=x_1$ 或 x_2 时，$\{a_n\}$ 是常数列；

（ii）当 $a_1\neq x_1$ 或 x_2，且 x_1，$x_2\in R$，$x_1\neq x_2$ 时，$\{a_n\}$ 是纯周期数列的充要条件是 $A+D=0$，且周期为2；

（iii）当 $a_1\neq x_1$ 或 x_2，且 x_1，x_2 为两共轭虚数时，$\{a_n\}$ 是纯周期数列的充要条件是 $\arg\left(\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}\right)=\frac{2k\pi}{T}$ $(k,\ T\in \mathrm{N},\ k<T)$，且周期为 T.

（iv）当 $a_1\neq x_1$ 或 x_2，$x_1=x_2$ 时，$\{a_n\}$不是周期数列.

证 由定理1.2及定理2.5

$$a_{n+T}=a_n(n\geqslant 1)\Longleftrightarrow\left(\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}\right)^T=1, \tag{1}$$

且两不动点 x_1，x_2 满足方程

$$Cx^2+(D-A)x-B=0. \tag{2}$$

（i）由定理1.2，显然成立.

（ii）设$\{a_n\}$是周期为 T 的纯周期数列，则由(1)，得

$$\left(\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}\right)^T=1,$$

由此推得

$$\left|\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}\right|=1,$$

从而有

$$(Cx_2+D)^2=(Cx_1+D)^2,$$

整理得

$$x_1+x_2=-\frac{2D}{C},$$

又由(2)得

$$x_1+x_2=\frac{A-D}{C},$$

故

$$-\frac{2D}{C}=\frac{A-D}{C},$$

由此解得

$$A+D=0.$$

而当 $A+D=0$ 时，

$$a_{n+2}=\frac{Aa_{n-1}+B}{Ca_{n-1}-A}=\frac{A\cdot\frac{Aa_n+B}{Ca_n-A}+B}{C\cdot\frac{Aa_n+B}{Ca_n-A}-A}$$

$$=\frac{A^2a_n+AB+BCa_n-AB}{CAa_n+BC-CAa_n+A^2}=a_n\quad(n\geqslant 1),$$

即周期为2. 命题(ii)得证.

(iii) 当 x_1，x_2 是两共轭虚数时，Cx_2+D，Cx_1+D 也是两共轭虚数.

设 $\{a_n\}$ 是周期为 T 的纯周期数列，则由(1)得

$$\left(\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}\right)^T=1,$$

因此

$$\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}=\cos\frac{2k\pi}{T}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{T}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ T-1)$$

（上式 $k\neq0$ 的理由是，因为 Cx_2+D，Cx_1+D 是共轭虚数，所以 $\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}$ 是虚数），所以

$$\arg\left(\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}\right)=\frac{2k\pi}{T}\ (k,\ T\in\mathrm{N},\ k<T).$$

反之，如果 $\arg\left(\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}\right)=\frac{2k\pi}{T}$ $(k,\ T\in\mathrm{N},\ k<T)$，则因 $\left|\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}\right|=1$，故有

$$\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}=\cos\frac{2k\pi}{T}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{T},$$

从而有

$$\left(\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}\right)^T=1,$$

由（1）得

$$a_{n+T}=a_n\ (n\geqslant1),$$

即 $\{a_n\}$ 是周期为 T 的纯周期数列.

(iv) $x_1=x_2$ 时，由定理 1.2，我们有

$$\frac{1}{a_n-x_1}=\frac{1}{a_1-x_1}+\frac{C(n-1)}{Cx_1+D},$$

所以，$\{a_n\}$ 不是周期数列.

例 5 数列 $\{x_n\}$ 中，若存在自然数 m，使当 n 为任意自然数时，都有

$$x_n+x_{n+2m}=2\cos\frac{2\pi}{7}x_{n+m},\tag{1}$$

求证：$x_{n+7m}=x_n$ 对任何自然数 n 成立.

证 （1）的特征方程为

$$t^{2m}-2\cos\frac{2\pi}{7}\cdot t^m+1=0,$$

$$\left(t^m-\cos\frac{2\pi}{7}\right)^2=-\sin^2\frac{2\pi}{7},$$

$$t^m=\cos\frac{2n}{7}\pm i\sin\frac{2\pi}{7},$$

解得

$$t_k=\cos\frac{\frac{2\pi}{7}+2k\pi}{m}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{7}+2k\pi}{m},$$

$$t_k'=\cos\frac{\frac{2\pi}{7}+2k\pi}{m}-i\sin\frac{\frac{2\pi}{7}+2k\pi}{m}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1).$$

因为 t_k 和 $t_k'(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$ 这 $2m$ 个不同的根都是（1）的特征根，所以由定理 1.3，我们有

$$x_n=\lambda_0t_0^n+\lambda_1t_1^n+\cdots+\lambda_{m-1}t_{m-1}^n+\lambda_0'(t_0')^n+\cdots$$
$$+\lambda'_{m-1}(t'_{m-1})^n.$$

因为

$$t_k^{7m}=1,\ (t_k')^{7m}=1\qquad(k=0,1,2,\cdots,m-1),$$

所以 $x_{n+7m}=x_n$ 对一切自然数 n 成立，即 $\{x_n\}$ 是周期为 $7m$ 的纯周期数列.

一般地，对于 r 阶线性递推数列，我们有一个条件很强的充分性定理.

定理 3.2 如果 r 阶线性递推数列

$$a_{n+r}=c_1a_{n+r-1}+c_2a_{n+r-2}+\cdots+c_{r-1}a_{n+1}+c_ra_n$$

的 r 个特征根 x_1，x_2，$\cdots$，x_r 是两两不相等的，且存在正整

数T_i，使$x_i^{T_i}=1$ ($i=1, 2, \cdots, r$)，则数列$\{a_n\}$是纯周期数列.

证 由定理1.3，

$$a_n=\lambda_1x_1^n+\lambda_2x_2^n+\cdots+\lambda_rx_r^n \ (n\geqslant 1).$$

取$T=[T_1, T_2, \cdots, T_r]$，其中$[T_1, T_2, \cdots, T_r]$是$T_1, T_2, \cdots, T_r$的最小公倍数，则有

$$\begin{aligned}a_{n+T}&=\lambda_1x_1^{n+T}+\lambda_2x_2^{n+T}+\cdots+\lambda_rx_r^{n+T}\\&=\lambda_1x_1^n+\lambda_2x_2^n+\cdots+\lambda_rx_r^n\\&=a_n\end{aligned}$$

对一切自然数n成立，所以$\{a_n\}$是纯周期数列.

3° 数学归纳法

例 6 函数f定义在整数集上，且满足

$$f(n)=\begin{cases}n-3, & \text{当}n\geqslant 1000, \quad (1)\\ f[f(n+5)], & \text{当}n<1000. \quad (2)\end{cases}$$

求$f(84)$.

解 因为(2)中$n\leqslant 999$，$n+5\leqslant 1004$，所以在(1)中从$n=1004$起倒退.

在(1)中，

$f(1004)=1001$，$f(1003)=1000$，$f(1002)=999$，

$f(1001)=998$，$f(1000)=997$；

在(2)中，

$$f(999)=f[f(1004)]=f(1001)=998,$$

$$f(998)=f[f(1003)]=f(1000)=997,$$

$$f(997)=f[f(1002)]=f(999)=998,$$

……

由此我们可以推断，当$n\leqslant 1000$时，$f(n)$是周期为2的纯周期数列，从而得到$f(84)=997$. 下面我们用数学归纳法加

以证明.

设 $a_n=f(1000-n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$. 前已知 $a_0=a_2=a_4=997$, $a_1=a_3=998$, 假设 $n\leqslant 2k(k\geqslant 2)$ 时, $a_0=a_2=a_4=\cdots=a_{2k}=997$, $a_1=a_3=\cdots=a_{2k-1}=998$, 则当 $n=2(k+1)$ 时,

$$\begin{aligned}a_{2(k+1)-1}=a_{2k+1}&=f[1000-(2k+1)]\\&=f[f(1000-(2k-4)]=f(a_{2k-4})\\&=f(997)=998,\end{aligned}$$

同理可证 $a_{2(k+1)}=997$, 这样我们证实了对一切非负整数n, $a_{n+2}=a_n$ 恒成立, 即当 $n\leqslant 1000$ 时, $f(n)$是周期为 2 的纯周期数列.

例 7 设 $S_{n,0}$, $S_{n,1}$ 和 $S_{n,2}$ 表示杨辉三角形中第 n 行里分别从左边的第一、第二和第三个元素起始, 同其后与它们每隔二个元素的和. 试用数学归纳法证明.

(i) $S_{n,0}$, $S_{n,1}$ 和$S_{n,2}$ 中有两个是相等的, 与另一个相差 1 (大 1 或小 1);

(ii) 在(i)中大 1 或小 1 变化的周期为 6 .

证 (i) $n=0$ 时, $S_{n,0}=1$, $S_{n,1}=S_{n,2}=0$, 命题成立; 假设 $n=k(k\geqslant 0)$时, $S_{k,0}$, $S_{k,1}$ 和 $S_{k,2}$ 中有两个相等, 且与另一个相差 1, 不妨设 $S_{k,1}=S_{k,2}$, 且它们比 $S_{k,0}$ 小 1. 则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}S_{k+1,0}&=C_{k+1}^0+C_{k+1}^3+C_{k+1}^6+\cdots\\&=C_k^0+(C_k^3+C_k^2)+(C_k^6+C_k^5)+\cdots\\&=S_{k,0}+S_{k,2},\end{aligned}$$

即

$$S_{k+1,0}=S_{k,0}+S_{k,2},$$

同理

$$S_{k+1,1}=S_{k,0}+S_{k,1},$$
$$S_{k+1,2}=S_{k,1}+S_{k,2}.$$

从而有

$$S_{k+1,0}-S_{k+1,1}=S_{k,2}-S_{k,1}, \quad (1)$$
$$S_{k+1,1}-S_{k+1,2}=S_{k,0}-S_{k,2}, \quad (2)$$
$$S_{k+1,2}-S_{k+1,0}=S_{k,1}-S_{k,0}. \quad (3)$$

因为 $S_{k,1}=S_{k,2}$，且它们比 $S_{k,0}$ 小 1，所以由(1)、(2)、(3)可知 $S_{k+1,0}=S_{k+1,1}$，且它们比 $S_{k+1,2}$ 大 1，即 $n=k+1$ 时，命题成立．故对一切非负整数 n，命题成立.

(ii) 利用(1)、(2)、(3)推得

$$S_{n+3,0}-S_{n+3,1}=S_{n+2,2}-S_{n+2,1}=S_{n+1,2}-S_{n+1,0}$$
$$=-(S_{n,0}-S_{n,1}),$$

从而得

$$S_{n+6,0}-S_{n+6,1}=-(S_{n+3,0}-S_{n+3,1})=S_{n,0}-S_{n,1},$$

即 $$S_{n+6,0}-S_{n+6,1}=S_{n,0}-S_{n,1}, \quad (4)$$

同理 $$S_{n+6,1}-S_{n+6,2}=S_{n,1}-S_{n,2}, \quad (5)$$

$$S_{n+6,2}-S_{n+6,0}=S_{n,2}-S_{n,0}. \quad (6)$$

(4)、(5)、(6)三式表明，$S_{n,0}$，$S_{n,1}$ 和 $S_{n,2}$ 中大 1 和小 1 变化的周期为 6.

这道题的另一解题途径是可以先求出 $S_{n,0}$，$S_{n,1}$ 和 $S_{n,2}$ 的通项公式.

设 $f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$，则

$$f(1)=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n, \quad (7)$$
$$f(\omega)=C_n^0+\omega C_n^1+\omega^2 C_n^2+\omega^3 C_n^3+\cdots+\omega^n C_n^n$$
$$=(1+\omega)^n=(-\omega^2)^n, \quad (8)$$
$$f(\omega^2)=C_n^0+\omega^2 C_n^1+\omega C_n^2+C_n^3+\cdots+\omega^{2n} C_n^n$$

$$=(1+\omega^2)^n=(-\omega)^n, \qquad (9)$$

其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$.

(7)+(8)+(9)，得

$$S_{n,0}=\frac{1}{3}[2^n+(-\omega^2)^n+(-\omega^n],$$

同理

$$S_{n,1}=\frac{1}{3}[2^n+\omega^2(-\omega^2)^n+\omega(-\omega)^n],$$

$$S_{n,2}=\frac{1}{3}[2^n+\omega(-\omega^2)^n+\omega^2(-\omega)^n].$$

从以上三个式子出发，也可以证明本题，证明留给读者.

4° 反证法

证明一个数列不是周期数列，反证法是一有力工具.

例 8 数 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是有理数吗？其中，如果 n 为素数，则 $a_n=1$；否则 $a_n=0$.

解 假设数 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是有理数，则数列 $\{a_n\}$ 是周期数列. 不妨设 $\{a_n\}$ 是从第 N 项起的周期为 T 的周期数列，即

$$a_{n+T}=a_n \ (n\geqslant N)$$

成立. 存在素数 $p\geqslant N$，则 $a_p=1$. 又有

$$a_{p+pT}=a_p=1,$$

但 $p+pT=p(1+T)$ 是合数，故 $a_{p+pT}=0$，矛盾.

所以，$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 不是有理数.

例 9 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 由下列规则确定：当 $n\geqslant1$ 时，$a_{2n}=a_n$，且当 $n\geqslant0$ 时，$a_{4n+1}=1$，$a_{4n+3}=0$. 求证：这个数列不是周期数列.

证 假设这个数列是周期数列，且其最小周期为T.

若$T=2t-1(t\geqslant 1)$，则由已知

$$1=a_{4n+1}=a_{4n+1+2T}=a_{4(n+t-1)+3}=0,$$

矛盾；若$T=2t(t\geqslant 1)$，则由已知

$$a_{2n+T}=a_{2n}=a_n,$$

又有

$$a_{2n+T}=a_{2(n+t)}=a_{n+t},$$

所以

$$a_{n+t}=a_n$$

对一切自然数n成立，即t是$\{a_n\}$的一个周期，这与所设$T=2t$是最小周期矛盾.

所以$\{a_n\}$不是周期数列.

在本节结束的时候，我们给出一个颇有意思的例子.

例 10 $\{a_n\}$是实数列，且满足

$$a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n,$$

求证：存在$N\in \mathrm{N}$，使当$n\geqslant N$时，恒有

$$a_{n+9}=a_n$$

成立.

证 显然$a_n\equiv 0$时结论成立. 下设$a_n\not\equiv 0$. 由于例1的启发，我们发现存在$N\in \mathrm{N}$，当$n\geqslant N$时，a_n不恒为正，也不恒为负. 否则，若a_n恒为正，则有$a_{n+3}=-a_n<0$，矛盾；若a_n恒为负，则$a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n>0$，矛盾. 因此不妨设$a_N=-a$，$a_{N+1}=b(a, b\geqslant 0, a, b$不全为零)，从而有

$$a_{N+2}=|a_{N+1}|-a_N=b+a,$$
$$a_{N+3}=|a_{N+2}|-a_{N+1}=a,$$
$$a_{N+4}=|a_{N+3}|-a_{N+2}=-b,$$
$$a_{N+5}=|a_{N+4}|-a_{N+3}=b-a.$$

（i）若 $b \geqslant a$，则有

$a_{N+6}=|a_{N+5}|-a_{N+4}=2b-a$，

$a_{N+7}=|a_{N+6}|-a_{N+5}=(2b-a)-(b-a)=b$，

$a_{N+8}=|a_{N+7}|-a_{N+6}=b-(2b-a)=a-b \leqslant 0$，

$a_{N+9}=|a_{N+8}|-a_{N+7}=b-a-b=-a$，

$a_{N+10}=a-(a-b)=b$.

（ii）若 $b<a$，则有

$a_{N+6}=|a_{N+5}|-a_{N+4}=a-b+b=a$，

$a_{N+7}=|a_{N+6}|-a_{N+5}=a(b-a)=2a-b>0$，

$a_{N+8}=|a_{N+7}|-a_{N+6}=2a-b-a=a-b>0$，

$a_{N+9}=|a_{N+8}|-a_{N+7}=(a-b)-(2a-b)=-a$，

$a_{N+10}=|a_{N+9}|-a_{N+8}=a-(a-b)=b$，

因此总有 $a_{N+9}=a_N$，$a_{N+10}=a_{N+1}$. 接下来，便可以利用递推式 $a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n$，用数学归纳法证明，对一切 $n \geqslant N$ 的自然数 n，恒有

$$a_{n+9}=a_n$$

成立. 论证的细节留给读者.

4　和数列的周期性

设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和($n \geqslant 1$). 我们知道，$\{a_n\}$ 是周期数列，$\{S_n\}$ 不一定是周期数列. 例如 $\{a_n\}$ 是正项周期数列，则 $\{S_n\}$ 递增，从而 $\{S_n\}$ 不是周期数列. 试问，附加什么条件才能使 $\{S_n\}$ 也是周期数列? 它们的周期之间有什么关系? 下面的定理回答了我们的问题.

定理 4.1　设数列 $\{a_n\}$ 是从第 N 项起的周期为 T 的周期数列，且 $a_N+a_{N+1}+\cdots+a_{N+T-1}=0$，则数列 $\{S_n\}$ 是从第 N

—1 项起的周期数列，且最小周期为 T.

证 因为 $a_{n+T}=a_n$ 对一切 $n\geqslant N$ 的自然数 n 成立，且

$$a_N+a_{N+1}+\cdots+a_{N+T-1}=0,$$

所以

$$\begin{aligned}
&S_{n-1+T}-S_{n-1}\quad(n\geqslant N)\\
&=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n-1+T}(\text{恰好一个周期长})\\
&=a_N+a_{N+1}+\cdots+a_{N-1+T}\\
&=0,
\end{aligned}$$

所以

$$S_{n-1+T}=S_{n-1}\quad(n\geqslant N),$$

即 $S_{n+T}=S_n$ 对一切 $n\geqslant N-1$ 的自然数 n 都成立．若 $N=1$，则我们可扩充定义 $S_0=a_0=a_T$，使结论仍然成立.

假如 $\{S_n\}$ 的最小周期 $T'<T$，则因

$$S_{n+T'}=S_n(n\geqslant N-1),$$

$$S_{n-1+T'}=S_{n-1}\quad(n\geqslant N),$$

两式相减得

$$a_{n+T'}=a_n$$

对一切 $n\geqslant N$ 的自然数 n 成立，即 T' 也是 $\{a_n\}$ 的一个周期，这与所设 T 是 $\{a_n\}$ 的最小周期矛盾．所以，$\{S_n\}$ 是从第 $N-1$ 项起的周期数列，且最小周期为 T.

为了使问题有一个完美的结果，我们反过来考虑：如果数列 $\{S_n\}$ 是周期数列，那么 $\{a_n\}$ 是否为周期数列？若是，它们的周期之间有什么关系？

定理 4.2 如果数列 $\{S_n\}$ 是从第 N 项起的周期为 T 的周期数列，则数列 $\{a_n\}$ 是从第 $N+1$ 项起的周期数列，最小周期为 T，且 $a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+T}=0$.

证 因为 $S_{n+T}=S_n\ (n\geqslant N)$,

$$S_{n-1+T}=S_{n-1}\ (n\geqslant N+1),$$

两式相减得

$$a_{n+T}=a_n$$

对一切$n\geqslant N+1$的自然数n成立，即$\{a_n\}$是从第$N+1$项起的周期数列，T是它的一个周期. 又有

$$\begin{aligned}&S_{n+T}-S_n\ (n\geqslant N)\\&=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+T}\ （恰好一个周期长）\\&=a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+T}=0.\end{aligned}$$

假如$\{a_n\}$的最小周期$T'<T$，则由定理2.3，有$T'|T$. 不妨设$T=kT'(k>1)$，则由上式，我们推得

$$k(a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+T'})=0,$$

从而有 $$a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+T'}=0.$$

根据定理4.1，T'是$\{S_n\}$的一个周期，这与所设矛盾. 所以，$\{a_n\}$是从第$N+1$项起的周期为T的周期数列，且$a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+T}=0$.

例 1 已知实数列$\{a_n\}(n=1, 2, \cdots)$具有下列性质：存在自然数T，满足$a_1+a_2+\cdots+a_T=0$及$a_{n+T}=a_n$ $(n=1, 2, \cdots)$. 证明：存在自然数N，使当$n=0, 1, 2, \cdots$时，满足$\sum\limits_{i=N}^{N+n}a_i\geqslant 0$.

证 定理4.1和定理4.2中并无"实数列"这一条件，这里是为了比较大小而加上的.

仿照定理4.1的证明，可知$\{a_n\}$的和数列$\{S_n\}$是周期为T的纯周期数列，由定理2.1，它的值域是有限数集. 因此可以不妨设

$$S_{N-1}=\sum_{i=1}^{N-1}a_i=\min_{n\in \mathbf{N}}\{S_n\},$$

则对任意非负整数n，都有

$$S_{n+N}-S_{N-1}\geqslant 0,$$

即
$$\sum_{i=1}^{n+N}a_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\geqslant 0,$$

也就是
$$\sum_{i=N}^{N+n}a_i\geqslant 0\quad(n\geqslant 0).$$

例 2 已知实数列$\{a_n\}$的和数列$\{S_n\}$是周期为T的周期数列，求证：至少存在一i，使得$a_i\leqslant 0$.

证 由定理4.2，我们有

$$a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+T}=0,$$

故至少存在一i，使$a_i\leqslant 0$.

本题也可以用反证法证明. 假设对一切自然数n，都有$a_n>0$，则$\{S_N\}$递增，从而$\{S_n\}$不是周期数列，这与所设矛盾.

5 周期点列

现在我们考虑平面上点列的周期性. 由于复平面上的点与复数一一对应，所以用复数可以将点列的周期性转化为数列的周期性来研究.

下面是国际中学生数学竞赛中与周期点列有关的一道试题.

例 1 平面上给定$\triangle A_1A_2A_3$及点P_0，定义$A_{n+3}=A_n$. 构造点列P_0，P_1，P_2，…，P_n，…，使得P_n为绕中心A_n顺时针旋转$120°$时P_{n-1}所到达的位置($n=1,2,\cdots$). 若$P_{1986}=P_0$，试证明$\triangle A_1A_2A_3$为正向等边三角形.

证 （题中的“正向”是指A_1，A_2，A_3呈逆时针排列）

设 $\omega=\cos(-120°)+i\sin(-120°)$，则 $\omega^3=1$，$1+\omega+\omega^2=0$. 把问题矢量化，我们有

$$\boldsymbol{A_nP_n}=\omega\boldsymbol{A_nP_{n-1}},$$

它的代数形式是

$$P_n-A_n=\omega(P_{n-1}-A_n),$$

整理得

$$P_n-\omega P_{n-1}=(1-\omega)A_n,$$

递推得

$$\omega(P_{n-1}-\omega P_{n-2})=(1-\omega)\omega A_{n-1},$$
$$\omega^2(P_{n-2}-\omega P_{n-3})=(1-\omega)\omega^2 A_{n-2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\omega^{n-1}(P_1-\omega P_0)=(1-\omega)\omega^{n-1}A_1,$$

上述几个等式相加，整理得

$$P_n=(1-\omega)[A_n+\omega A_{n-1}+\omega^2A_{n-2}+\cdots+\omega^{n-1}A_1]+\omega^nP_0. \quad (1)$$

当 $n=3k(k\in\mathrm{N})$时，因为 $A_{n+3}=A_n$ 及 $\omega^3=1$，所以由(1)得

$$P_{3k}=k(1-\omega)(A_3+\omega A_2+\omega^2A_1)+P_0. \quad (2)$$

因为

$$P_{1986}=P_0,\ 1986=3\times 662,$$

所以由(2)得

$$A_3+\omega A_2+\omega^2A_1=0,$$

又 $1+\omega+\omega^2=0$，$\omega^2=-1-\omega$，从而有

$$A_3-A_1=\omega(A_1-A_2),$$

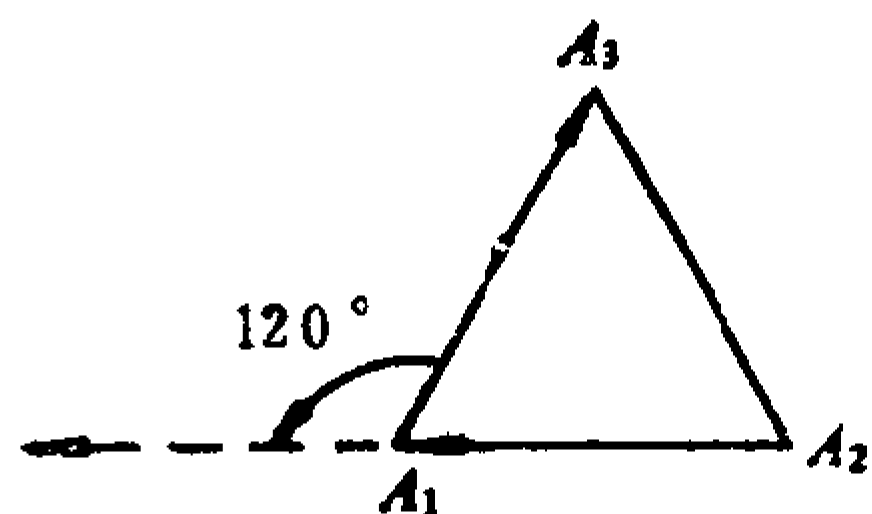


图 2

即 $\boldsymbol{A_1A_3}=\omega\boldsymbol{A_2A_1}$，所以 $|A_1A_3|=|A_1A_2|$，$\angle A_2A_1A_3=60°$，且A_1, A_2, A_3呈逆时针排列(图2)，

也就是说$\triangle A_1A_2A_3$是正向等边三角形.

我们还可以进一步证明：当$\triangle A_1A_2A_3$为正向等边三角形时，点列$\{P_n\}$是周期为3的纯周期点列. 事实上，由(1)得

$$\begin{aligned}P_{n+3}&=(1-\omega)[A_{n+3}+\omega A_{n+2}+\omega^2A_{n+1}\\&\quad+\omega^3A_n+\cdots+\omega^{n+2}A_1]+\omega^{n+3}P_0\\&=(1-\omega)(A_{n+3}+\omega A_{n+2}+\omega^2A_{n+1})+P_n,\end{aligned}$$

因为$\triangle A_1A_2A_3$为正向等边三角形，所以$\triangle A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$也是正向等边三角形，从而有

$$A_{n+3}-A_{n+1}=\omega(A_{n+1}-A_{n+2}),$$

整理得

$$A_{n+3}+\omega A_{n+2}+\omega^2A_{n+1}=0,$$

这样我们就推得$P_{n+3}=P_n$对一切非负整数n成立.

综上所述，在题设条件不变的情况下，如下命题是成立的：$\{P_n\}$是周期为3的纯周期点列的充要条件是$\triangle A_1A_2A_3$为正向等边三角形.

在例1中我们看到，点列$\{P_n\}$的构造依赖于点P_0，角$\theta=-120°$以及旋转中心点列$\{A_n\}$. 为了进一步探索，我们给出如下定义.

对于给定的点P_0、角$\theta(-\pi<\theta<\pi,\ \theta\neq0)$和点列$\{A_n\}$，点列$\{P_n\}$如此构造得到：$\boldsymbol{A_nP_{n-1}}$绕$A_n$旋转$\theta$角到达$\boldsymbol{A_nP_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，这样得到的点列$\{P_n\}$称为中心点列$\{A_n\}$的旋转点列，记作$\{P_n|P_0,\ \theta,\ A_n\}$.

记$\omega=\cos\theta+i\sin\theta$，则显然有$\omega\neq1$. 类似例1，我们有

$$\boldsymbol{A_nP_n}=\omega\boldsymbol{A_nP_{n-1}},$$

$$P_n-\omega P_{n-1}=(1-\omega)A_n, \qquad (1)$$

$$P_n=(1-\omega)(A_n+\omega A_{n-1}+\cdots+\omega^{n-1}A_1)+\omega^n P_0 \quad (2)$$

首先我们想到，如果$\{P_n|P_0, \theta, A_n\}$是周期为T'的数列，那么点列$\{A_n\}$是什么性质的数列．由(1)得

$$A_{n+T'}=\frac{1}{1-\omega}(P_{n+T'}-\omega P_{n-1+T'})$$
$$=\frac{1}{1-\omega}(P_n-\omega P_{n-1})=A_n$$

对一切$n\in\mathrm{N}$成立，即$\{A_n\}$是纯周期点列．设$\{A_n\}$的周期为T，则由定理2.3，$T'=kT(k\in\mathrm{N})$．

定理 5.1 点列$\{P_n|P_0, \theta, A_n\}$是周期为T'的纯周期点列的必要条件是$\{A_n\}$是周期为T的纯周期点列，且$T'=kT(k\in\mathrm{N})$．

我们自然会联想到，在点列$\{A_n\}$是周期为T的纯周期点列的条件下，点列$\{P_n|P_0, \theta, A_n\}$是不是周期点列？有一点是肯定的，那就是如果$\{P_n|P_0, \theta, A_n\}$是周期为T'的纯周期点列，则$T'=kT(k\in\mathrm{N})$．为此，我们注意下面的表达式．

设$\{A_n\}$是周期为T的周期数列，由(2)得

$$\begin{aligned}P_T&=(1-\omega)(A_T+\omega A_{T-1}+\omega^2A_{T-2}+\cdots\\&\quad+\omega^{T-1}A_1)+\omega^TP_0\\&=(1-\omega)B+\omega^TP_0, \qquad (3)\\P_{2T}&=(1-\omega)[A_{2T}+\omega A_{2T-1}+\omega^2A_{T-2}+\cdots\\&\quad+\omega^{2T-1}A_1]+\omega^{2T}P_0\\&=(1-\omega)[(A_T+\omega A_{T-1}+\omega^2A_{T-2}+\cdots\\&\quad+\omega^{T-1}A_1)+\omega^T(A_T+\omega A_{T-1}+\omega^2A_{T-2}\\&\quad+\cdots+\omega^{T-1}A_1)]+\omega^{2T}P_0\\&=(1-\omega)(1+\omega^T)B+\omega^{2T}P_0,\end{aligned}$$

……

$$P_{kT}=(1-\omega)(1+\omega^T+\omega^{2T}+\cdots+\omega^{(k-1)T})$$
$$(A_T+\omega A_{T-1}+\omega^2 A_{T-2}+\cdots+\omega^{T-1}A_1)+\omega^{kT}P_0,$$
$$=(1-\omega)C\cdot B+\omega^{kT}P_0, \qquad (4)$$

其中 $B=A_T+\omega A_{T-1}+\omega^2 A_{T-2}+\cdots+\omega^{T-1}A_1$,

$C=1+\omega^T+\omega^{2T}+\cdots+\omega^{(k-1)T}$.

由于$\{A_n\}$是周期为T的周期数列，因此由数列$\{P_n|P_0, \theta, A_n\}$的构造法可知，$\{P_n\}$是周期为$T'=kT$的充要条件是$P_{kT}=P_0$. 当$k=1$时，如果$\omega^T=1$，则由$P_T=P_0$和(3)式推出$B=0$；如果$\omega^T\neq 1$，则$P_0=\dfrac{1-\omega}{1-\omega^T}\cdot B$，当$k>1$时，由$P_{kT}=P_0$及(4)式，可推出类似的结论. 于是我们有如下定理.

定理 5.2 设点列$\{A_n\}$是周期为T的纯周期点列.

(1)点列$\{P_n|P_0, \theta, A_n\}$是周期为$T'=T$的纯周期点列的充要条件是：如果$\omega^T=1$，则$B=0$；如果$\omega^T\neq 1$，则$P_0=(1-\omega)B/(1-\omega^T)$；

(2)点列$\{P_n|P_0, \theta, A_n\}$是周期$T'=kT(k>1)$的纯周期点列的充要条件是：如果$\omega^{kT}=1$，则$B=0$或$C=0$；如果$\omega^{kT}\neq 1$，则$P_0=(1-\omega)BC/(1-\omega^{kT})$. 其中$B=A_T+\omega A_{T-1}+\omega^2 A_{T-2}+\cdots+\omega^{T-1}A_1$，$C=1+\omega^T+\omega^{2T}+\cdots+\omega^{(k-1)T}$.

(定理5.2指出，如果$\omega^T=1$或$\omega^{kT}=1$，则对任意P_0，点列$\{P_n|P_0, \theta, A_n\}$都是纯周期点列；如果$\omega^T\neq 1$或$\omega^{kT}\neq 1(k>1)$，则点列$\{P_n|P_0,\theta,A_n\}$是否纯周期点列要由点P_0的位置决定.)

证 (2)因为点列$\{P_n|P_0, \theta, A_n\}$是周期为$T'=kT$的纯周期点列$\Longleftrightarrow P_{kT}=P_0$，故可令$P_{kT}=P_0$，从而由(4)式得

$$B\cdot C=0\ (\text{因为}\ \omega\neq 1).$$

如果 $\omega^{kT}=1$，则 $(1-\omega^T)(1+\omega^T+\cdots+\omega^{(k-1)T})=(1-\omega^T)C=0$，这里，若 $\omega^T=1$，则 $C=1+\omega^T+\cdots+\omega^{(k-1)T}=k\neq 0$，推得 $B=0$；若 $\omega^T\neq 1$，则 $C=0$.

如果 $\omega^{kT}\neq 1$，则从(4)式推得

$$P_0=(1-\omega)BC/(1-\omega^{kT}).$$

定理得证.

例 2 已知点列 $\{A_n\}$：A_1，A_2，A_3，$A_{n+3}=A_n(n\geqslant 1)$，试讨论下列点列的周期性：(1) $\left\{P_n\middle| P_0, \frac{2\pi}{3}, A_n\right\}$；(2) $\left\{P_n \middle| P_0, \frac{\pi}{6}, A_n\right\}$.

解 (1)因为 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$，$T=3$，$\omega^T=\omega^3=1$，所以当 $A_3+\omega A_2+\omega A_1=0$ 时，$\left\{P_n \middle| P_0, \frac{2\pi}{3}, A_n\right\}$对任意 P_0 都是周期为 3 的纯周期点列.

因为 $1+\omega+\omega^2=0$，所以 $\omega^2=-1-\omega$. 这样，$A_3+\omega A_2+\omega^2 A_1=0$ 可化为

$$A_3+\omega A_2-A_1-\omega A_1=0,$$
$$A_3-A_1=\omega(A_1-A_2),$$
$$A_1A_3=\omega A_2A_1,$$

所以 $|A_1A_3|=|A_2A_1|$，$\angle A_2A_1A_3=60°$，即$\triangle A_1A_2A_3$是等边三角形，且 A_1，A_2，A_3 呈顺时针排列.

(2)因为 $\omega=\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$，$\omega^3=-1\neq 1$，$\omega^6=1$，$T=3$，此时 $C=1+\omega^T=0$，点列$\left\{P_n\middle|P_0, \frac{\pi}{6}, A_n\right\}$ 是周期为

6 的纯周期点列.

例 3 分别以四边形 $MNPQ$ 的各边向外作平行四边形得另外八个顶点(图 3) $A_1, A_2, \cdots, A_8$. 求证: $A_1, A_2, \cdots, A_8$ 恰为某个八边形各边的中点.

解 作周期为 8 的点列 $\{A_n\}$: $A_1, A_2, \cdots, A_n, A_{n+8}=A_n (n\geqslant 1)$, 以及点列 $\{P_n|P_0, \pi, A_n\}$. 因为 $\theta=\pi$, 所以 P_{n-1} 和 P_n 关于 A_n 对称, 即 A_n 是 P_{n-1} 和 P_n 的中点.

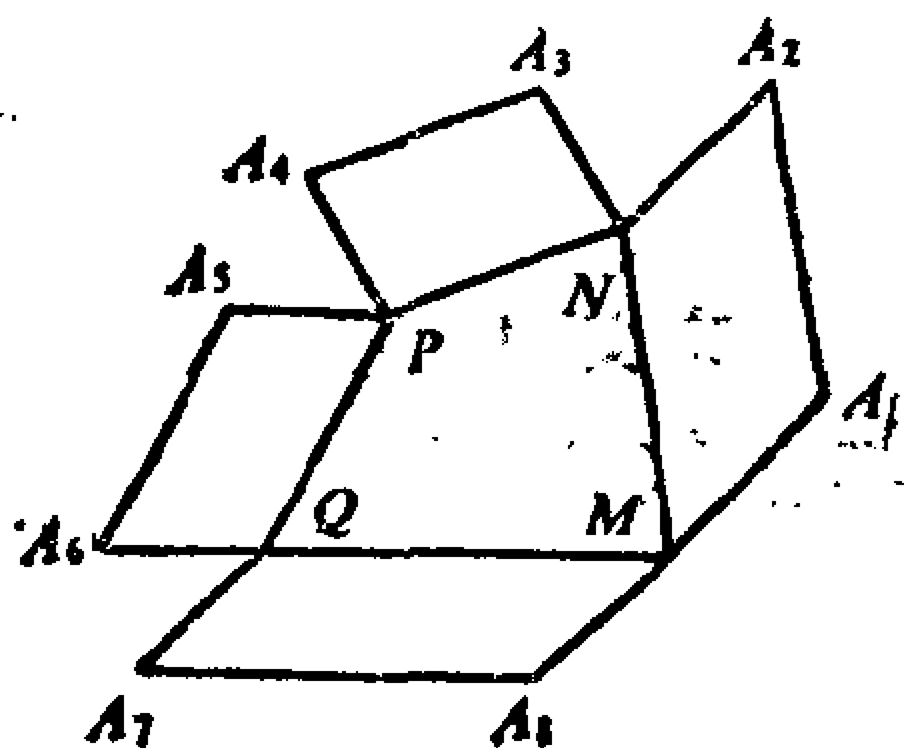


图 3

因为 $\omega=\cos\pi+i\ \sin\pi=-1$, $\omega^T=\omega^8=1$, 所以 $\{P_n|P_0, \pi, A_n\}$ 是周期为 8 的纯周期点列, 也是说 $A_1, A_2, \cdots, A_8$ 依次是 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_7$ 各边的中点.

例 4 两条直线 l_1 和 l_2 相交, 交角为 γ (图 4). 一只跳蚤从一条直线向另一条直线跳跃, 每跳跃一次的长度是一米, 并且不往回跳, 只要这是可能的. 证明: 当且仅当 $\dfrac{\gamma}{\pi}$ 是有理数时, 跳跃是周期的。

证 显然每次跳跃都是一个单位向量. 考虑连续的三次跳跃, 容易算得第三次跳跃所对应的单位向量 α_3 是由第一次跳跃所对应的单位向量 α_1 旋转 2γ (或 -2γ) 角度而得到的. 设一系列跳跃所对应的单位向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$, 则有

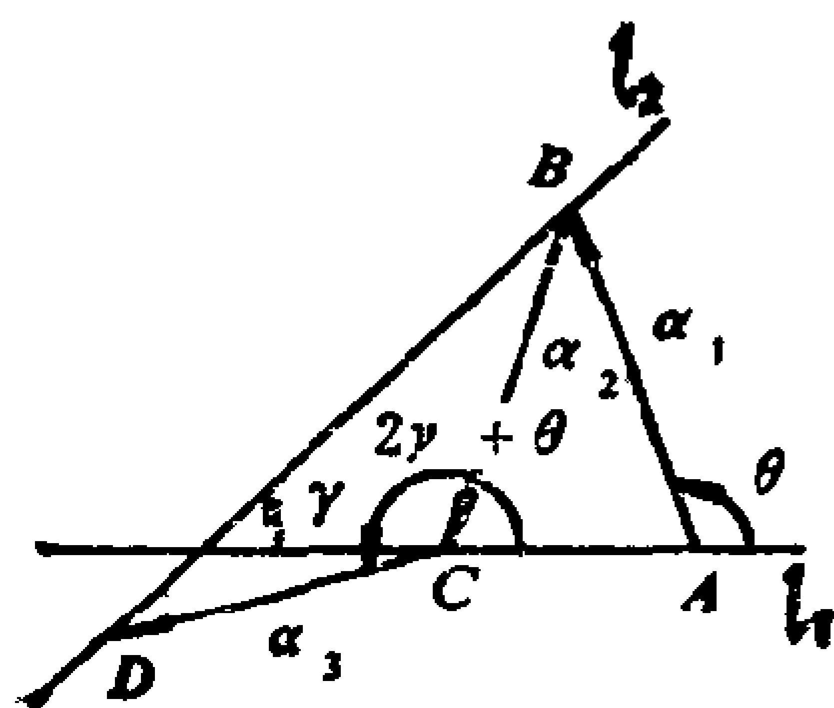


图 4

$$\alpha_{n+2}=\omega\alpha_n \quad (n\geqslant 1),$$

其中 $\omega=\cos 2\gamma+\mathrm{i}\sin 2\gamma$ 或 $\omega=\cos 2\gamma-\mathrm{i}\sin 2\gamma$.

于是跳跃是周期的 $\Longleftrightarrow\{\alpha_n\}$ 是周期的 $\Longleftrightarrow\{\omega^n\}$ 是周期数列 $\Longleftrightarrow\gamma/\pi$ 是有理数.

6 函数迭代和周期点

定义 1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且对每一 $x\in D$，都有 $f(x)\in D$. 令 $f^{(0)}(x)=x$，$f^{(1)}(x)=f(x)$，

$$f^{(n)}(x)=\underbrace{f(f(\cdots(f}_{n\text{个}f}(x)))),$$

则称 $f^{(n)}(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 n 次迭代，$f(x)$ 称为 $f^{(n)}(x)$ 的迭代函数，$\{f^{(n)}(x)\}$ 称为由函数 $f(x)$ 迭代所得的函数列.

定义 2 在定义 1 的条件下，如果存在常自然数 T，使得 $f^{(n+T)}(x)=f^{(n)}(x)$ 对一切自然数 n 成立，则称 T 的最小值为 $f(x)$ 的迭代周期.

实际上，迭代周期 T 是函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 的周期.

由定义 1，我们得到

定理 6.1 $f^{(m+n)}(x)=f^{(m)}(f^{(n)}(x))$.

特别地，有 $f^{(n+1)}(x)=f(f^{(n)}(x))$.

我们可以用数学归纳法证明

定理 6.2 如果存在最小常自然数 T，使得

$$f^{(T)}(x)=x,$$

则 T 是 $f(x)$ 的迭代周期.

推论 若 $f^{(T)}(x)=x$，则 $f^{(nT)}(x)=f^{(T)}(x)=x$.

仿照定理 2.3 的证明，我们有

定理 6.3 若 $f(x)$ 的最小迭代周期为 T，T' 是它的另一个迭代周期，则 $T|T'$.

定理 6.2 的推论是定理 6.3 的直接结果.

例 1 设 $f(x)=\dfrac{x+6}{x+2}$，计算它的 n 次迭代 $f^{(n)}(x)$.

解 由定理 6.1 的推论，得

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{f^{(n)}(x)+6}{f^{n}(x)+2}.$$

我们可以仿照定理 1.2 来求它的 n 次迭代 $f^{(n)}(x)$. 令 $f(x)=x$，解得不动点值为 $x_1=2$，$x_2=-3$，故有

$$\frac{f^{(n)}(x)-2}{f^{(n)}(x)+3}=\frac{\dfrac{f^{(n-1)}(x)+6}{f^{(n-1)}(x)+2}-2}{\dfrac{f^{(n-1)}(x)+6}{f^{(n-1)}(x)+2}+3}=-\frac{1}{4}\frac{f^{(n-1)}(x)-2}{f^{(n-1)}(x)+3}$$

$$=\frac{f^{(0)}(x)-2}{f^{(0)}(x)+3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}=\frac{x-2}{x+3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n},$$

由此解得

$$f^{(n)}(x)=\frac{[2\cdot(-4)^{n}+3]x+6\cdot[(-4)^{n}-1]}{[(-4)^{n}+1]x+[3\cdot(-4)^{n}+2]}.$$

例 2 设 $f(x)=\dfrac{2x-7}{x+1}$，求它的1990次迭代 $f^{(1990)}(x)$.

解 经计算得 $f^{(1)}(x)=\dfrac{2x-7}{x+1}$，$f^{(2)}(x)=-\dfrac{x+7}{x-2}$，$f^{(3)}(x)=x$，故由定理 6.2 可知，迭代周期为 3.

因为

$$1990=3\times 663+1,$$

所以

$$f^{(1990)}(x)=f^{(1)}(x)=\frac{2x-7}{x+1}.$$

本题的另一解法是：令 $f(x)=x$，解得不动点 x

$=\frac{1\pm 3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，从而由定理 1.3，得

$$\frac{f^{(n)}(x)-\frac{1+3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}}{f^{(n)}(x)-\frac{1-3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}}=\frac{\frac{2f^{(n-1)}(x)-7}{f^{(n-1)}(x)+1}-\frac{1+3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}}{\frac{2f^{(n-1)}(x)-7}{f^{(n-1)}(x)+1}-\frac{1-3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}}$$

$$=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\cdot\frac{f^{(n-1)}(x)-\frac{1+3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}}{f^{(n-1)}(x)-\frac{1-3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}},$$

因为 $\left(\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3=1$，所以由定理 3.1，函数列 $\left\{\frac{f^{(n)}(x)-\frac{1+3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}}{f^{(n)}(x)-\frac{1-3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}}\right\}$ 是周期为 3 的纯周期函数列.

再由定理 2.5 可知，$\{f^{(n)}(x)\}$ 是周期为 3 的纯周期函数列，即$f(x)$的迭代周期为 3．

由定理 3.1 可知，下面的定理是成立的.

定理 6.4 设迭代函数 $f(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D}$（常数 A，B，C，$D\in\mathrm{R}$，$ABC\neq 0$)的不动点是x_1，x_2，$x_1\neq x_2$，则$f(x)$ 的迭代周期为T的充要条件是$\left(\frac{Cx_2+D}{Cx_1+D}\right)^T=1$.

定义 3 设$f^{(n)}(x)$是函数$f(x)$的 n 次迭代. 如果在函数$f(x)$ 的定义域 D 中存在一点 a，使得 $f^{(T)}(a)=a$，而且 $f^{(j)}(a)\neq a(1\leqslant j<T$，$T$ 是常自然数)，则称 a 是f 的 T 周期点.

因为$f(x)=x$可推出$f(f(x))=f(x)=x,\cdots,f^{(T-1)}(x)=x$，所以，如果函数$f(x)$有迭代周期$T$，即有$f^{(T)}(x)=x$，则$f(x)$的定义域$D$中，除去$f^{(T-1)}(x)$的不动点(即满足$f^{(T-1)}(x_0)=x_0$的$x_0$)，余下的都是$T$周期点.

例 3 设S是复平面上的单位圆周(即模等于1的复数集合)，m是大于1的自然数. 定义f如下：

$$f(z)=z^m(z\in S).$$

试计算f的1989周期点的个数.

解 用数学归纳法易知

$$f^{(n)}(z)=x^{m^n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

记$B_n=\{z|f^{(n)}(z)=z,\ z\in S\}$. 由$f^{(n)}(z)=z$，得

$$z(z^{m^n-1}-1)=0.$$

因为$z\in S$，$z\neq0$，所以

$$z^{m^n-1}=1.$$

这个方程有m^n-1个不同的根，其模均为1，故$|B_n|=m^n-1$($|B_n|$表示集合B_n中元素个数).

设$z\in B_k(k<n)$，即有$f^{(k)}(z)=z$，$z\in S$.

(i) 如果$n=qk$，则由定理6.2的推论

$$f^{(n)}(z)=f^{(qk)}(z)=f^{(k)}(z)=z,$$

故$z\in B_n$，从而$B_k\subset B_n$(显然B_n中至少有一个元素$z'\overline{\in}B_k$)，即若k是n的真约数，$B_k\subset B_n$.

(ii) 如果$k\nmid n$，即$n=qk+r(1\leqslant r\leqslant k-1)$，则由定理6.1及(i),得

$$f^{(n)}(z)=f^{(qk+r)}(z)=f^{(r)}(f^{(qk)}(z))=f^{(r)}(z).\qquad(1)$$

若$z\in B_n$，即有$z\in B_n\cap B_k$，则从(1)得$f^{(r)}(z)=z$，故$z\in B_r$，这就有$B_n\cap B_k\subseteq B_r$；若$z\in B_r$，则从(1)推得$f^{(n)}(z)=z$，则$z\in B_n$. 因$z\in B_k$，故$B_r\subseteq B_n\cap B_k$. 这样我们就有

$$B_n \cap B_k = B_r.$$

由辗转相除法，我们得到

$$B_k \cap B_n = B_{(k,n)},$$

这里(k, n)是k和n的最大公约数.

由(i)可知，为了计算1989周期点，我们必须在B_{1989}中除去一些点，这些点包含在B_k中，k是1989的真约数，但1989有许多真约数，为了避免重复计数，我们必须找1989的最大的真约数. 因为$1989 = 3^2 \times 13 \times 17$，所以1989的三个最大的而且互不整除的真约数为$663 = 3 \times 13 \times 17$，$153 = 3^2 \times 17$，$117 = 3^2 \times 13$(若$k'|k$，$k|n$，则$B_{k'} \subseteq B_k$). 于是由容斥原理及(ii)，得

f的1989周期点的总数

$$\begin{aligned}
&= |B_{1989}| - |B_{663} \cup B_{153} \cup B_{117}| \\
&= |B_{1989}| - (|B_{663}| + |B_{153}| + |B_{117}| \\
&\qquad - |B_{663} \cap B_{153}| - |B_{663} \cap B_{117}| - |B_{153} \cap B_{117}| \\
&\qquad + |B_{663} \cap B_{153} \cap B_{117}|) \\
&= |B_{1989}| - |B_{663}| - |B_{153}| - |B_{117}| \\
&\qquad + |B_{51}| + |B_{39}| + |B_9| - |B_3| \\
&= m^{1989} - m^{663} - m^{153} - m^{117} + m^{51} + m^{39} + m^9 - m^3.
\end{aligned}$$

练 习 一

1. 设数列$\{a_n\}$的前n项的和为S_n，$a_1=2$，$a_{n+1}=S_n+n^2-n-2$（$n\geqslant 1$），求a_n.

2. 数列$\{a_n\}$由$a_n=f(a_{n-1})$确定，并且$a_n\neq\pm 1$ ($n\geqslant 1$)，

$$f(x)=\frac{C_k^0x^k+C_k^2x^{k-2}+C_k^4x^{k-4}+\cdots}{C_k^1x^{k-1}+C_k^3x^{k-3}+C_k^5x^{k-5}+\cdots}\quad (k\text{为正奇数})$$

有不动点x_1，$x_2(x_1\neq x_2)$. 求证：数列$\left\{\ln\frac{a_n+x_1}{a_n+x_2}\right\}$是公比为$k$的等比数列.

3. 设$a_1=3, a_{n+1}=a_n^2-2(n\geqslant 1)$，求证：$a_n=\frac{f_2{}^{n+1}}{f_2n}$ ($n\geqslant 1$)，其中$\{f_n\}$是斐波那契数列.

4. 设$a_1=1$，$a_2=-1$，$a_n=-a_{n-1}-2a_{n-2}(n\geqslant 3)$，证明：当$n\geqslant 2$时，$2^{n+1}-7a^2{}_{n-1}$是一个完全平方数.

5. 数列$\{x_n\}$定义如下：

$$x_1=2,\quad x_2=3,\quad \begin{cases} x_{2m+1}=x_{2m}+x_{2m-1} & (m\geqslant 1),\\ x_{2m}=x_{2m-1}+2x_{2m-2} & (m\geqslant 2).\end{cases}$$

求x_n.

6. 已知$a_1=a_2=1$，$a_n=\frac{a^2{}_{n-1}+2}{a_n-2}$ ($n\geqslant 3$)，证明对一切$n\in\mathbf{N}$，a_n为整数.

7. 设$S=a_0a_1a_2\cdots$，其中如果在n的二进制表示中有偶数个1，则$a_n=0$；如果有奇数个1，则$a_n=1$. 于是$S=0110100110\cdots$. 定义$T=b_1b_2b_3\cdots$，其中b_i是在S的第i个0和第$i+1$个0之间的1的个数. 于是$T=2102012\cdots$. 证明T仅含三个数字0，1，2.

8. 设a是一个自然数，$f(a)$是a的各位数字的平方和. 定义数列$\{a\}_n$：a_1是不超过三位的自然数，$a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant 2)$. 试证：存在整数$m$，使$a_{3m}=a_{2m}$.

9. 设$\{P_n\}$是有界的整数列，且满足条件

$$P_n=\frac{P_{n-1}+P_{n-2}+P_{n-3}P_{n-4}}{P_{n-1}\cdot P_{n-2}+P_{n-3}+P_{n-4}}.$$

求证：数列$\{P_n\}$最终是周期的．

10．考虑数列1，1，2，3，5，8，13，21，34，…(斐波那契数列)．将这数列中的每一项的最后三位数字记下（如果这个数少于三位，则在其左边添加0)：001，001，002，003，005，008，013，021，034，…．证明：得到的数列是周期数列．

11．一数列递推地定义：$u_1=a$（任一正数），

$$u_{n+1}=-1/(u_n+1),\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$$

当n为下列哪一个数值时，必有$u_n=a$?

（A）14；（B）15；（C）16；（D）17；（E）18.

12．判断下列数列的周期性

（1）$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n-2}$ $(n\geqslant 1)$；

（2）$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-13}{3a_n-7}$ $(n\geqslant 1)$.

13．已知$a_2=2$，$a_3=5$，$a_n=-(a_{n-1}+a_{n-2})(n\geqslant 3)$，试求$a_{1999}$.

14．已知数列$\{A_n\}$：A_1，A_2，$A_{n+2}=A_n(n\geqslant 1)$，试讨论数列$\{P_n|P_0$，$\dfrac{\pi}{2}$，$A_n\}$的周期性．

15．求证：

(1) $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$的迭代周期是3；

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}x-1}{x+\sqrt{3}}$ 的迭代周期是6．

第二章　模周期数列

7　基本概念

数论中的同余理论是模周期数列的基础．我们不加证明地给出经常要用到的同余性质．

定义 1　若 $m|a-b$，则称 a 与 b 对于模 m 同余，记作 $a\equiv b(\bmod m)$，这里 a，b 为整数，m 是正整数．

同余性质：

1°　若 $a_1\equiv b_1(\bmod m)$，$a_2\equiv b_2(\bmod m)$，则

（i）　$a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2\ (\bmod m)$，

（ii）　$a_1a_2\equiv b_1b_2\ (\bmod m)$，

（iii）　$a_1^n\equiv b_1^n\ (\bmod m)$，$n$ 为任意正整数．

2°　若 $(c,\ m)=1$，$ac\equiv bc\ (\bmod m)$，则

$$a\equiv b\ (\bmod m).$$

3°　若 $a\equiv b\ (\bmod m_i)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，则

$$a\equiv b\ (\bmod M),$$

这里 $M=[m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n]$．

反过来，我们有

4°　若 $a\equiv b\ (\bmod m)$，$m'|m$，则

$$a\equiv b\ (\bmod m')$$

推论　（i）若 $a\equiv b\ (\bmod m^n)$，则

$$a\equiv b\ (\bmod m^k),\ k\leqslant n.$$

（ii）$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,m_1)$，$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,m_2)$ 的充要条件是 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,M)$，$M=[m_1,m_2]$. 特别地，当 p_1、p_2 为素数时，$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,p_1)$，$a\equiv b(\mathrm{mod}\,p_2)$的充要条件是 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,p_1p_2)$.

几个重要定理.

费尔马小定理 若 p 是素数，且 $p\nmid a$，则

$$a^{p-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,p).$$

欧拉定理 若 $(a,\ m)=1$，则

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,m),$$

这里 $\varphi(m)$是欧拉函数. 所谓欧拉函数 $\varphi(n)$是指不大于 n 而且与 n 互素的正整数的个数. 如 $\varphi(1)=1$，$\varphi(2)=1$，$\varphi(3)=2$，…. 当 p 是素数时，显然有 $\varphi(p)=p-1$，因此费尔马定理是欧拉定理的特例.

中国剩余定理 设 m_1，m_2，…，m_t 是两两互素的，b_1，b_2，…，b_t 是任意整数，则同余方程组

$$x\equiv b_1\ (\mathrm{mod}\,m_1)$$
$$x\equiv b_2\ (\mathrm{mod}\,m_2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$x\equiv b_t\ (\mathrm{mod}\,m_t)$$

对模 $m=m_1m_2\cdots m_t$ 有唯一解.

费尔马小定理和欧拉定理，对于判定数列 $\{a^n(\mathrm{mod}\,m)\}$ 的周期有许多用处.

以后，不加特别说明，$[a,\ b]$表示 a，b 的最小公倍数，$(a,\ b)$表示 a，b 的最大公约数，$(a,\ b)=1$ 表示 a，b 互质.

定义 2 0，1，2，…，$m-1$ 称为模 m 的非负最小剩余系.

定义 3 $\{a_n\}$为整数列，规定 $a_n(\mathrm{mod}\,m)\in\{0,\ 1,\ 2,$

$\cdots, m-1\}$，并称数列 $\{a_n(\bmod m)\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的模数列．即模数列的值域$\sqsubseteq$\{非负最小剩余系\}．

仿照第 2 节的定义，我们有

定义 4 对于整数列$\{a_n\}$，存在常自然数 T．若从它的第 N 项起，恒有

$$a_{n+T}\equiv a_n \pmod m, \quad n\geqslant 1$$

成立，则称 $\{a_n(\bmod m)\}$ 是模周期数列．T 称为模周期数列 $\{a_n(\bmod m)\}$的一个周期．T 的最小值（若不加特别说明）简称为周期，记作 $T(m)$．当 $N=1$ 时，称为模纯周期数列；当 $N\geqslant 2$ 时，称为模混周期数列．

我们对第 2 节的定理稍加修改，就得到下面的定理 7.1～7.4，证明完全是类似的，留给读者自己完成．

定理 7.1 模周期数列的值域是有限整数集．

定理 7.2 如果整数列$\{a_n\}$满足

$$a_{n+r}=f(a_{n+r-1}, a_{n+r-2}, \cdots, a_n),$$

这里 f 是 r 元整系数多项式，则模数列$\{a_n(\bmod m)\}$ 是周期数列．

只须设 $\bar{a}_n\equiv a_n(\bmod m)$，$0\leqslant\bar{a}_n\leqslant m-1$，仿照定理 2.2 证明即可．

定理 7.3 若 $T=T(m)$ 是模周期数列的最小周期，T' 是它的另一个周期，则 $T|T'$，即 $T'=kT$，$k\geqslant 1$．

定理 7.4 若模数列$\{a_n(\bmod m)\}$ 和 $\{b_n(\bmod m)\}$均是周期数列，则$\{a_n\pm b_n(\bmod m)\}$，$\{a_nb_n(\bmod m)\}$ 也是周期数列．

定理 7.5 若模周期数列$\{a_n(\bmod m)\}$ 和 $\{a_n(\bmod m')\}$的周期分别为 $T=T(m)$ 和 $T=T(m')$，且 $m'|m$，则

$$T(m')|T(m).$$

证 由已知

$$a_{n+T(m)} \equiv a_n \pmod m$$

对一切 $n \geqslant N$ 的自然数 n 成立．因为 $m' | m$，所以由性质 $4°$ 得

$$a_{n+T(m)} \equiv a_n \pmod{m'}$$

对一切 $n \geqslant N$ 的自然数 n 成立，即 $T(m)$ 也是 $\{a_n \pmod{m'}\}$ 的一个周期，由定理 7.3 得

$$T(m') | T(m).$$

定理 7.6 若模周期数列 $\{a_n \pmod{m_1}\}$，$\{a_n \pmod{m_2}\}$ 和 $\{a_n \pmod M\}$ 的周期分别为 $T(m_1)$，$T(m_2)$ 和 $T(M)$，这里 $M=[m_1, m_2]$，且 $m_1 \neq m_2$，则

$$T(M)=[T(m_1), T(m_2)].$$

证 由已知，

$$a_{n+[T(m_1),T(m_2)]} \equiv a_n \pmod{m_1}$$

$$a_{n+[T(m_1),T(m_2)]} \equiv a_n \pmod{m_2},$$

根据同余性质 $3°$，得

$$a_{n+[T(m_1),T(m_2)]} \equiv a_n \pmod M,$$

根据定理 7.3，得

$$T(M) | [T(m_1), T(m_2)]. \qquad (1)$$

反之，因为 $m_1 | M$，$m_2 | M$，所以由定理 7.5 得

$$T(m_1) | T(M),$$

$$T(m_1) | T(M),$$

故

$$[T(m_1), T(m_2)] | T(M). \qquad (2)$$

由（1）、（2）得

$$T(M)=[T(m_1), T(m_2)],$$

即

$$T([m_1, m_2])=[T(m_1), T(m_2)].$$

推论 若p_1，p_2为两相异素数，则

$$T(p_1p_2)=[T(p_1),\ T(p_2)].$$

定理 7.7 数列$\{n^l(\bmod m)\}$是周期为m的纯周期数列，这里l为给定正整数.

证 因为$n+m\equiv n(\bmod m)$，所以由同余性质1°得

$$(n+m)^l\equiv n^l\ (\bmod m),$$

于是$\{n^l(\bmod m\}$是周期为m的纯周期数列.

例 1 证明：1·2·3，2·3·4，3·4·5，…，$n(n+1)(n+2)$，…的个位上的数字周期性地重复.

证 设$a_n=n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n^2$，由定理7.7，$\{n^3(\bmod 10)\}$，$\{n^2(\bmod 10)\}$，$\{n(\bmod 10)\}$都是周期为10的纯周期数列，故$\{a_n(\bmod 10)\}$也是周期为10的纯周期数列，从而$a_n$的个位上的数字周期性地重复.

例 2 设数列1，9，8，3，4，3，…，其中a_{n+4}为$a_n+a_{n+3}(n=1,2,3,\cdots)$的个位数字，试证

$$a_{1998}^2+a_{1999}^2+a_{2000}^2+3$$

是4的倍数.

证 为证$a_{1998}^2+a_{1999}^2+a_{2000}^2+3$是4的倍数，我们只须分析$a_{1998}$，$a_{1999}$，$a_{2000}$的奇偶性即可，这是因为偶数的平方是4的倍数，奇数的平方是4的倍数加上1.

由已知$a_{n+4}\equiv a_n+a_{n+3}(\bmod 10)$. 设$b_n\equiv a_n(\bmod 2)$，则$a_n$和$b_n$的奇偶性相同，且

$$b_{n+4}\equiv b_n+b_{n+3}(\bmod 2).$$

递推数列的模数列是周期数列. $\{b_n(\bmod 2)\}$的前若干项为：

1,1,0,1,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,1,1,0,1,0,…,

发现$\{b_n(\bmod 2)\}$是周期为15的纯周期数列，所以$\{a_n(\bmod$

10)}的奇偶性变化也是周期为 15 的纯周期数列.
因为

$$b_{n+15}\equiv b_n(\bmod 2),$$

所以

$$b_{1998}\equiv b_8\equiv 0,\ b_{1999}\equiv b_9\equiv 0,\ b_{2000}\equiv b_{10}\equiv 1(\bmod 2).$$

因为 a_n 和 b_n 的奇偶性相同，所以 $a_{1998}^2+a_{1999}^2+a_{2000}^2+3$ 是 4 的倍数.

例 3 设 $a_1=1$，$a_2=2$，并且

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n, & \text{当 } a_na_{n+1} \text{ 为偶数时},\\ a_{n+1}-a_n, & \text{当 } a_na_{n+1} \text{ 为奇数时},\end{cases}$$

求证：$a_n\neq 0(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

证明 若能证明对某个模 m，$a_n\not\equiv 0(\bmod m)$对一切自然数 n 成立，则必有 $a_n\neq 0(n\in\mathbf{N})$. 我们发现$\{a_n(\bmod 4)\}$的前若干项为

$$1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$$

即 $\{a_n(\bmod 4)\}$ 是周期为 3 的纯周期数列. 下面用数学归纳法证明这一结论.

设 $a_n\equiv b_n(\bmod 4)$，则 a_n 和 b_n 的奇偶性相同，从而有

$$b_{n+2}\equiv\begin{cases}b_{n+1}+b_n & \\ b_{n+1}-b_n & \end{cases}(\bmod 4),\quad \begin{matrix}\text{当 } b_nb_{n+1} \text{ 为偶数时}, & (1)\\ \text{当 } b_nb_{n+1} \text{ 为奇数时}, & (2)\end{matrix}$$

前已知 $b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=3$，归纳法的奠基成立；假设 $n=k$ 时，$b_{3k-2}=1$，$b_{3k-1}=2$，$b_{3k}=3$，则当 $n=k+1$ 时，

由(1)，$b_{3(k+1)-2}=b_{3k+1}\equiv b_{3k}+b_{3k-1}\equiv 3+2\equiv 1\ (\bmod 4)$，

由(2)，$b_{3(k+1)-1}=b_{3k+2}\equiv b_{3k+1}-b_{3k}\equiv 1-3\equiv 2\ (\bmod 4)$，

由(1)，$b_{3(k+1)}=b_{3k+3}\equiv b_{3k+2}+b_{3k+1}\equiv 2+1\equiv 3\ (\bmod 4)$，

即 $n=k+1$ 时，结论也成立. 故对一切自然数 n，命题成立. 这样，我们证明了 $\{a_n(\bmod 4)\}$ 是周期为 3 的纯周期数列.

因为它的前 3 项为 1，2，3，所以 $a_n \not\equiv 0 \pmod{4}$ $(n \in \mathrm{N})$，从而有 $a_n \neq 0$ $(n \in \mathrm{N})$.

例 4 定义数列$\{a_n\}$如下：$a_1=3$，$a_{n+1}=3^{a_n}$，$n \geqslant 1$. 问在 00 到 99 中的哪些整数，出现在无穷多个 a_n 的十进制表示的末两位数上？

解 由定理 7.8，我们知道 $\{3^n \pmod{10}\}$ 是周期为 4 的纯周期数列：3，9，7，1，3，9，7，1，…. 而 $i \geqslant 1$ 时，因为 $a_1=3$，我们可用数学归纳法证明

$$a_{i+1}=3^{a_i} \equiv (-1)^{a_i} \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4},$$

即 $i \geqslant 1$ 时，$\{a_i \pmod{4}\}$是常数列：3，3，3，…，3,…，所以 $\{a_n \pmod{10}\}$ 为：3，7，7，7，…，这是 $\{a_n\}$ 的个位数字.

现在考虑$\{3^{a_n}\}$的末两位数.

由欧拉定理

$$3^{\varphi(100)} \equiv 1 \pmod{100},$$

其中欧拉数 $\varphi(100)=40$. 因为

$$3^n \equiv 3^n \pmod{100},$$

从而有

$$3^{n+\varphi(100)} \equiv 3^n \pmod{100}$$

对一切自然数 n 成立，故 $\{3^n \pmod{100}\}$ 是纯周期数列，40 是它的一个周期. 但实际上$\{3^n \pmod{100}\}$的最小周期为 20：3，9，27，81，43，29，87,61,83，49，47，41，23，69，7，21，63，89，61，1；3，9，27，…

前已证知

$$a_{i+1} \equiv 3 \pmod{4},\ i \geqslant 0,$$

于是

$$a_{i+1}=3^{a_i}=3^{4m+3} \equiv 3^3 \equiv 2 \pmod{5},\ i \geqslant 1$$

(由费尔马小定理 $3^4\equiv1\pmod{5}$)，再由中国剩余定理得

$$a_i\equiv7\pmod{20},\quad i\geqslant2.$$

因 $a_1=3$，$a_i\equiv7\pmod{20}$，$i\geqslant2$，故$\{a_n\pmod{100}\}$为：3，27，87，87，87，…，即只有87出现无穷多次.

下面这个例子，虽然不是属于模周期数列的范畴，但它也是用模周期性的方法去解决的.

例5　有一个三角形数表：

```
      1
    1 1 1
  1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
… … … …
```

这张表是这样构造的：从第二行起的每个数是它上面的一个数以及紧靠这个数的左、右两数的三个数的和，如果某些位置上没有数字，就用0代替.

证明：从第三行起，每一行至少包含一个偶数.

证　对这张表的每个数取模2，则取模后的前若干行的前四项为

```
      1
     1 1 1
    1 0 1 0
   1 1 0 1
  1 0 0 0
 1 1 1 0
1 0 1 0
```

从表中看出，从第三行起，每一行的前四项的奇偶性呈周期性变化，变化的周期为4．根据这张表的构造方法和数

学归纳法我们可以证明这一结论.

因为第3,4,5,6行中至少有一个偶数，所以由周期性，从第三行起，每行至少包含一个偶数.

8 模斐波那契数列

众所周知，著名的斐波那契数列不仅在数学上有许多漂亮的性质，而且还有较多的实际应用. 本节我们着重讨论模斐波那契数列的性质.

定理 8.1 已知斐波那契数列 $\{f_n\}$: $f_0=0$, $f_1=1$, $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}(n\geqslant 1)$，则对任何自然数 m，$\{f_n(\bmod m)\}$是纯周期数列.

证 设 $f_n\equiv\bar{f}_n(\bmod m)$，$0\leqslant\bar{f}_n\leqslant m-1$，则

$$\bar{f}_{n+1}\equiv\bar{f}_n+\bar{f}_{n-1}\ (\bmod m). \tag{1}$$

我们考察有序数对

$$(\bar{f}_0,\ \bar{f}_1),\ (\bar{f}_1,\ \bar{f}_2),\ \cdots,\ (\bar{f}_{n-1},\ \bar{f}_n),\ \cdots, \tag{2}$$

其中$(\bar{f}_0,\ \bar{f}_1)=(0,\ 1)$. 我们规定当且仅当 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$ 时，$(a_1,\ b_1)=(a_2,\ b_2)$.

如果存在常自然数 T，使$(\bar{f}_T,\ \bar{f}_{T+1})=(\bar{f}_0,\ \bar{f}_1)$，则有 $\bar{f}_T=\bar{f}_0$，$\bar{f}_{T+1}=\bar{f}_1$，则由(1)式，$\bar{f}_{T+2}\equiv\bar{f}_{T+1}+\bar{f}_T(\bmod m)$，$\bar{f}_2\equiv\bar{f}_1+\bar{f}_0(\bmod m)$，从而得到 $\bar{f}_{T+2}=\bar{f}_2$. 这样，我们就可以用数学归纳法证明，对一切非负整数 n，$\bar{f}_{n+T}=\bar{f}_n$ 成立，即 $\{f_n(\bmod m)\}$ 是纯周期数列. 下面，我们证明存在 T，使 $(\bar{f}_T,\ \bar{f}_{T+1})=(\bar{f}_0,\ \bar{f}_1)$.

事实上，在有序数对(2)中不相等的至多只有 m^2 个，因此在(2)的前 m^2+1 个中至少有两个是相等的. 不妨设 $(\bar{f}_{N+T},\ \bar{f}_{N+1+T})=(\bar{f}_N,\ \bar{f}_{N+1})(N\geqslant 0,\ N+T+1\leqslant m^2+1)$.

若$N=0$，则$(\bar{f}_T, \bar{f}_{T+1})=(\bar{f}_0, \bar{f}_1)$；若$N\geqslant 1$，由$(\bar{f}_{N+T}, \bar{f}_{N+1+T})=(\bar{f}_N, \bar{f}_{N+1})$得，$\bar{f}_{N+T}=\bar{f}_N$，$\bar{f}_{N+1+T}=\bar{f}_{N+1}$，再由(1)得

$$\bar{f}_{N-1+T}\equiv\bar{f}_{N+1+T}-\bar{f}_{N+T}\ (\mathrm{mod}\,m),$$
$$\bar{f}_{N-1}\equiv\bar{f}_{N+1+T}-\bar{f}_N\ (\mathrm{mod}\,m),$$

所以得到$\bar{f}_{N-1+T}=f_{N-1}$. 如此经过N次倒退，我们最终得到$(\bar{f}_T, \bar{f}_{T+1})=(\bar{f}_0, \bar{f}_1)$.

所以，$\{f_n(\mathrm{mod}\,m)\}$是纯周期数列.

为了研究$\{f_n(\mathrm{mod}\,m)\}$的周期与m的关系，我们罗列如下事实，并从这些事实中找出一些规律.

$$\begin{aligned}f_n&=f_{n-1}+f_{n-2}\\&=2f_{n-1}+f_{n-3}\quad (T(2)=3)\\&=\cdots\\&=8f_{n-5}+4f_{n-6}+f_{n-6}\quad (T(4)=6)\\&=\cdots,\end{aligned}$$

经过计算机验证，我们得到

$T(2)=3$, $T(4)=6$, $T(8)=12$, $T(16)=24$, $\cdots$;
$T(3)=8$, $T(9)=24$, $T(27)72$, $\cdots$; $T(5)=20$,
$T(25)=100$, $\cdots$; $T(6)=24$, $T(12)=24$,
$T(144)=24$, $\cdots$.

从这些事实中，我们可初步归纳出下面3条结论.

1° $T([m, n])=[T(m), T(n)]$, $m\neq n$;

2° $m>2$时，$T(m)$为偶数;

3° 若p为素数，则$T(p^k)=p^{k-1}T(p)$.

对于1°，大家熟知，这是定理7.6. 下面，我们证明结论2°.

定理 8.2 若$m>2$，则$\{f_n(\mathrm{mod}\,m)\}$的周期$T=T(m)$是

偶数.

证 由于证明的需要，我们先引进一个斐波那契数列的恒等式

$$f_{n+m}=f_nf_{m+1}+f_{n-1}f_m \ (n\geqslant 1,\ m\geqslant 0). \qquad (\text{I})$$

这个恒等式易用归纳法证明，证略.

如果对斐波那契数列 $\{f_n\}$: $f_0=0$, $f_1=1$, $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}(n\geqslant 1)$, 向 n 是负数的方向反推，则有 $f_{-1}=1$, $f_{-2}=-1$, $f_{-3}=2$, $f_{-4}=-3$, $f_{-5}=5,\cdots$, 这样，我们就可用数学归纳法证明

$$f_{-n}=(-1)^{n-1}f_n \qquad (\text{II})$$

对一切整数 n 成立. 证略.

有了(II)式，我们可以证明，对一切整数 m,n, (I)式是成立的. 证略.

在(I)式中，令 $m=-(n+1)$, 得

$$1=f_{-1}=f_n\cdot f_{-n}+f_{n-1}f_{-(n+1)},$$

利用(II)式，得

$$1=(-1)^{n-1}f_n^2+(-1)^nf_{n-1}f_{n+1},$$

即

$$(-1)^n=-f_n^2+f_{n-1}f_{n+1}. \qquad (\text{III})$$

在(III)中，令 $n=T(m)$, 得

$$\begin{aligned}(-1)^{T(m)}&\equiv -f_{T(m)}^2+f_{T(m)-1}f_{T(m)+1}\\&\equiv -f_0^2+f_{-1}f_1\\&\equiv 1(\bmod m).\end{aligned}$$

所以当 $m>2$ 时，$T=T(m)$ 为偶数.

这个定理更为简捷的证明是，在(II)中，令 $n=T+1$, 则

$$f_{-T-1}\equiv(-1)^{T(m)}f_{T+1}(\bmod m),$$

从而得

$$(-1)^{T(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m),$$

所以 $T=T(m)$ 为偶数.

定理 8.3 满足 $f_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$ 项 f_n 的下标 n 构成一简单等差数列，即存在一个最小正整数 $d=d(m)$，使得

$$m \mid f_n \Longleftrightarrow d \mid n \ (\text{其中 } m \mid f_d).$$

证 设 $m \mid f_n$，并设 $m \mid f_n$ 的项 f_n 中下标最小的为 d，即 $m \mid f_d$. 由(Ⅱ)式，$m \mid f_{-d}$. 在(Ⅰ)式中令 $m=-d$，则有

$$f_{n-d} = f_n f_{-d+1} + f_{n-1} f_{-d}.$$

因为 $m \mid f_n$，$m \mid f_d$，所以 $m \mid f_{n-d}$. 从而递推得 $m \mid f_{n-2d}$，$m \mid n-2d$，…. 如果 $d \nmid n$，则显然存在 $d'<d$，使 $m \mid f_{d'}$，这与所设矛盾，故 $d \mid n$.

反之，若有下标最小的 d，使 $m \mid f_d$. 则因 $\{f_n (\mathrm{mod}\, m)\}$ 是周期为 $T=T(m)$ 的纯周期数列，必有

$$f_d \equiv f_{2d} \equiv \cdots \equiv f_{kd} = 0 \ (\mathrm{mod}\, m).$$

若不然，有 $d \nmid n$，使 $m \mid f_n$，则同前面所证一样，存在 $d'<d$，使 $m \mid f_{d'}$，矛盾. 这样，我们证明了，$d \mid n \Rightarrow m \mid f_n$.

推论 $d(m) \mid T(m)$.

证 因为

$f_{T(m)} \equiv f_0 = 0 (\mathrm{mod}\, m)$，所以由定理 8.3，$d(m) \mid T(m)$.

我们继续观察 $\{f_n\}$ 的前若干项：

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …,

可以看出 $d(2)=3$，$d(3)=4$，$d(4)=6$，$d(5)=5$，$d(6)=12$，$d(7)=8$，$d(8)=6$，$d(9)=12$，$d(11)=10$，$d(12)=12$，….

比较 $T(m)$ 和 $d(m)$ 之间的关系，下面的定理成立.

定理 8.4 当 $m>2$ 时，$T(m) \mid 4d(m)$，更精确地有

(i) 若 $d(m)$ 为偶数，则 $T(m) \mid 2d(m)$;

（ii）若 $d(m)$ 为奇数，则 $T(m)=4d(m)$.

证 设 $d=d(m)$，则 $m|f_d$. 在(Ⅲ)中，令 $n=d$，得

$$
\begin{aligned}
(-1)^d &= -f_d^{\,2}+f_{d-1}f_{d+1}\\
&\equiv (f_{d+1}-f_d)f_{d+1}\\
&\equiv f_{d+1}^2-f_df_{d+1}\\
&\equiv f_{d+1}^2 \pmod m.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

又在(Ⅰ)中，令 $n=d+1$，$m=d$，得

$$f_{2d+1}=f_{d+1}f_{d+1}+f_d\cdot f_d\equiv f_{d+1}^2 \pmod m, \tag{2}$$

由(1)与(2)，得

$$f_{2d+1}\equiv(-1)^d. \tag{3}$$

（i）若 $d=d(m)$ 为偶数，则由定理8.3，

$$f_{2d}\equiv f_d\equiv f_0\equiv 0 \pmod m.$$

又由(3)，$f_{2d+1}\equiv(-1)^d\equiv 1\equiv f_1 \pmod m$，于是可以用数学归纳法证明 $2d$ 是 $\{f_n \pmod m\}$ 的一个周期，故

$$T(m)\mid 2d(m),$$

由定理8.3推论，

$$d(m)\mid T(m),$$

所以，我们有 $T(m)=d(m)$ 或 $T(m)=2d(m)$.

（ii）若 $d(m)$ 为奇数，则在(3)式中，用 $2d$ 代替 d，我们得到

$$f_{4d+1}\equiv(-1)^{2d}\equiv 1 \pmod m,$$

又由定理8.3，

$$f_{4d}\equiv f_d\equiv 0 \pmod m,$$

同样可用数学归纳法证明 $4d$ 是 $\{f_n \pmod m\}$ 的一个周期，从而有

$$T(m)\mid 4d(m).$$

因为 $m>2$ 时，$T(m)$ 为偶数. 所以 $T(m)=2d(m)$ 或 $T(m)$

$=4d(m)$.

若 $T(m)=2d(m)$，则由(3)式.

$$f_{2d+1}\equiv f_{T+1}\equiv f_1\equiv 1\equiv(-1)^d\equiv -1\ (\mathrm{mod}\,m),$$

矛盾，所以 $T(m)=4d(m)$.

总的说来，我们有 $T(m)\mid 4d(m)$.

由定理8.4的证明过程可以知道，定理8.2是定理8.4一个直接的结果.

定理8.4的意义在于，为找 $T(m)$，可以先找 $d(m)$.

例 1 设 $f_n\equiv a_n(\mathrm{mod}5)$，$0\leqslant a_n\leqslant 4$. 求证：$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是有理数.

证 因为$\{f_n(\mathrm{mod}5)\}$是周期为20的纯周期数列，所以$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是循环节为20的纯循环小数，所以$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是有理数.

例 2 对于斐波那契数列$\{f_n\}$：$f_0=0$，$f_1=1$，$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}(n\geqslant 1)$，有 $5\mid f_n\Longleftrightarrow 5\mid n$.

证 由定理8.3，

$$5\mid f_n\Longleftrightarrow d(5)\mid n.$$

因为

$$d(5)=5,$$

所以

$$5\mid f_n\Longleftrightarrow 5\mid n.$$

例 3 已知斐波那契数列：$f_0=0$，$f_1=1$，$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$，$n\geqslant 0$. 令

$$S(n)=f_{2n+1}+f_{2n+3}+f_{2n+5}+\cdots+f_{4n-1},$$

问对哪些 n，$S(n)$ 是10的倍数？

解

$$f_{4n}=f_{4n-1}+f_{4n-2},$$

$$f_{4n-2}=f_{4n-3}+f_{4n-4},$$
$$f_{4n-4}=f_{4n-5}+f_{4n-6},$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$f_{2n+2}=f_{2n+1}+f_{2n}.$$

上述等式相加，我们得到

$$f_{4n}-f_{2n}=f_{2n+1}+f_{2n+3}+f_{2n+5}+\cdots+f_{4n-1},$$

从而有

$$S(n)=f_{4n}-f_{2n}.$$

因为$\{f_n(\bmod 5)\}$是周期为 20 的纯周期数列，它的前20项为：

0，1，1，2，3，0，3，3，1，－1，

0，－1，－1，－2，－3，0，－3，－3，－1，1，

所以 $\{f_{2n}(\bmod 5)\}$ 是周期为 10 的纯周期数列，它 的 前 10 项为：

0，1，3，3，1，0，－1，－3，－3，－1，

$\{f_{4n}(\bmod 5)\}$是周期为 5 的纯周期数列， 它的前 5 项为：0，3，1，－1，－3，进一步可知，$\{f_{4n}-f_{2n}(\bmod 5)\}$ 是周 期为 10 的纯周期数列，它的 前 10 项 为：0，2，－2，1，1，0，－1，－1，2，－2，从而知道

$$5\mid f_{4n}-f_{2n}\Longleftrightarrow 5\mid n.$$

因为 $\{f_n(\bmod 2)\}$ 是周期为 3 的纯周期数列，它的前若干项 为0，1，1，0，1，1，…，所以 $\{f_{2n}(\bmod 2)\}$ 是周期为 3 的纯周期数列，它的前若干项为：0，1，1，0，1，1，…，从而看出$f_{2n}\equiv f_n(\bmod 2)$，进一步有 $f_{4n}\equiv f_{2n}(\bmod 2)$，即 $S(n)=f_{4n}-f_{2n}\equiv 0(\bmod 2)$.

综上所述，我们有

$$10\mid S(n)=f_{4n}-f_{2n}\Longleftrightarrow 5\mid n.$$

例 4 设 p 是素数，a 与 b 是整数，且 $a^2+ab-b^2\not\equiv 0 \pmod{p}$. $v_0=a$, $v_1=b$, $v_{n+1}=v_n+v_{n-1}(n\geqslant 1)$. 证明：数列 $\{v_n \pmod{p}\}$ 是纯周期数列，且其周期与 a, b 无关.

证 仿照定理 8.1 的证明，可知 $\{v_n \pmod{p}\}$ 是纯周期数列.

观察 $\{v_n\}$ 的前若干项：

$v_0=a$, $v_1=b$, $v_2=a+b$, $v_3=a+2b$, $v_4=2a+3b$,

$v_5=3a+5b$, $\cdots$

我们归纳出 $\{v_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 之间的一个关系式

$$v_0=a, \quad v_n=bf_n+af_{n-1}(n\geqslant 1). \tag{1}$$

我们用数学归纳法证明（1）式.

归纳法的奠基成立；

假设 $n\leqslant k(k\geqslant 2)$ 时，（1）式成立. $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}v_{k+1}&=v_k+v_{k-1}=(bf_k+af_{k-1})+(bf_{k-1}+af_{k-2})\\&=b(f_k+f_{k-1})+a(f_{k-1}+f_{k-2})\\&=bf_{k+1}+af_k,\end{aligned}$$

即（1）式亦成立. 故对一切自然数 n，（1）式成立.

设 $\{f_n \pmod{p}\}$ 的周期为 $T(p)$，$\{v_n \pmod{p}\}$ 的周期为 $T'(p)$. 如果我们能证明 $T'(p)=T(p)$，则 $\{v_n \pmod{p}\}$ 的周期就与 a, b 无关.

由（1）式

$$\begin{aligned}v_{n+T(p)}&\equiv bf_{n+T(p)}+af_{n-1+T(p)}\\&\equiv bf_n+af_n\\&\equiv v_n \pmod{p},\end{aligned}$$

即 $T(p)$ 也是 $\{v_n \pmod{p}\}$ 的一个周期，故

$$T'(p)\mid T(p).$$

由（1）得

$$v_{n+1}=bf_{n+1}+af_n=(a+b)f_n+bf_{n-1}. \tag{2}$$

从(1)、(2)两式消去f_{n-1}，得

$$(a^2+ab-b^2)f_n=av_{n+1}-bv_n. \tag{3}$$

由(3)得

$$\begin{aligned}(a^2+ab-b^2)f_{n+T'(p)}&\equiv av_{n+1+T'(p)}-bv_{n+T'(p)}\\&\equiv av_{n+1}-bv_n\\&\equiv(a^2+ab-b^2)f_n(\bmod p),\end{aligned}$$

因为

$$(a^2+ab-b^2)\not\equiv 0(\bmod p),\quad p\text{ 为素数},$$

所以

$$f_{n+T'(p)}\equiv f_n(\bmod p),$$

即$T'(p)$也是$\{f_n(\bmod p)\}$的一个周期，故有

$$T(p)\mid T'(p).$$

所以

$$T(p)=T'(p),$$

即$\{v_n(\bmod p)\}$是纯周期数列，且其周期与a，b无关.

本题条件可减弱为p是自 然 数，$(a^2+ab-b^2,\ p)=1$，结论不变.

定理 8.5 若p是素数，则

$$T(p^{r+1})\mid pT(p^r),\quad r\geqslant 1.$$

证 设$T=T(p^r)$，则

$$f_{kT}\equiv 0,\quad f_{kT-1}\equiv 1\equiv f_{kT+1}\equiv f_1=1(\bmod p^r)(k\geqslant 0),$$

在恒等式(Ⅰ)中，令$n=T$，$m=kT$，得

$$f_{(k+1)T}=f_Tf_{kT+1}+f_{T-1}f_{kT}. \tag{1}$$

因为

$$f_{kT+1}\equiv 1,\quad f_T\equiv 0(\bmod p^r),$$

所以

$$f_{kT+1}=q\cdot p^r+1,$$

所以

$$f_T f_{kT+1}\equiv qf_T\cdot p^r+f_T\equiv f_T(\mathrm{mod}\,p^{2r}).$$

同理

$$f_{T-1}f_{kT}\equiv f_{kT}(\mathrm{mod}\,p^{2r}).$$

所以由(1),

$$f_{(k+1)T}\equiv f_T+f_{kT}(\mathrm{mod}\,p^{2r}).$$

上式经过递推，得

$$f_{(k+1)T}\equiv(k+1)f_T(\mathrm{mod}\,p^{2r}),$$

特别地有

$$f_{pT}\equiv pf_T(\mathrm{mod}\,p^{2r}).$$

因为

$$r\geqslant 1,\ 2r\geqslant r+1,$$

所以

$$f_{pT}\equiv pf_T\equiv 0(\mathrm{mod}\,p^{r+1}). \tag{2}$$

在恒等式(Ⅰ)中，再令 $n=T+1$，$m=kT$，得

$$\begin{aligned} f_{(k+1)T+1}&=f_{T-1}f_{kT+1}+f_T f_{kT}\\ &\equiv f_{T+1}f_{kT+1}\\ &\equiv(f_{T+1}-1)f_{kT+1}+f_{kT+1}(\mathrm{mod}\,p^{2r}). \end{aligned} \tag{3}$$

因为

$$f_{T+1}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p^r),$$
$$f_{kT+1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p^r),$$

所以

$$(f_{T+1}-1)f_{kT+1}\equiv f_{T+1}-1(\mathrm{mod}\,p^{2r}).$$

所以由(3)得

$$f_{(k+1)T+1}\equiv(f_{T+1}-1)+f_{kT+1}(\mathrm{mod}\,p^{2r}).$$

上式经过递推，得

$$f_{(k+1)T+1}\equiv(k+1)(f_{T+1}-1)+1(\bmod p^{2r}).$$

特别地有

$$f_{pT+1}\equiv p(f_{T+1}-1)+1(\bmod p^{2r}),$$

同理有

$$f_{pT+1}\equiv p(f_{T+1}-1)+1\equiv 1(\bmod p^{r+1}). \qquad (4)$$

由(2)、(4)，可用数学归纳法证明 pT 是 $\{f_n\ (\bmod p^{r+1})\}$ 的一个周期，故有

$$T(p^{r+1})\mid pT(p^r).$$

推论 $T(p^{r+1})=T(p^r)$ 或 $T(p^{r+1})=pT(p^r)$.

这是因为为 p 是素数，如果有 $T(p^{r+1})=pT(p^r)$，则有 $T(p^{r+1})=p^rT(p)$.

定理 8.6 p 是素数. 若 $T(p^{r+1})\neq T(p^r)$，则

$$T(p^{k+1})=pT(p^k)=p^{k-r+1}T(p^r)(k\geqslant r\geqslant 1).$$

证 在已知条件下，我们有

$$T(p^{r+1})=pT(p^r).$$

设 $T=T(p^r)$. 由定理 8.5 的证明可知

$$f_{pT}\equiv pf_T(\bmod p^{2r}),$$

$$f_{pT+1}\equiv p(f_{T+1}-1)+1(\bmod p^{2r}).$$

因为 $T(p^{r+1})=pT(p^r)$，所以 $f_T\equiv 0(\bmod p^{r+1})$ 和 $f_{T+1}\equiv 1$ $(\bmod p^{r+1})$ 这两者不能同时成立，否则可用数学归纳法证明 T 是 $\{f_n(\bmod p^{r+1})\}$ 的一个周期，从而有 $T(p^{r+1})\mid T(p^r)$，这与 $T(p^{r+1})=pT(p^r)$ 矛盾. 同理，

$$f_{pT}\equiv pf_T\equiv 0(\bmod p^{r+2})$$

和

$$f_{pT+1}\equiv p(f_{T+1}-1)+1\equiv 1\ (\bmod p^{r+2})$$

也不能同时成立. 从而有

$$T(p^{r+2})\neq pT=pT(p^r)=T(p^{r+1}),$$

即从$T(p^{r+1})\neq T(p^r)\Rightarrow T(p^{r+2})\neq T(p^{r+1})$. 这样我们就用数学归纳法证明了

$$T(p^{k+1})\neq T(p^k)(k\geqslant r).$$

从而有

$$T(p^{k+1})=pT(p^k)(k\geqslant r\geqslant 1).$$

经递推即得

$$T(p^k)=p^{k-r}T(p^r)(k\geqslant r\geqslant 1).$$

9　模纯周期数列

上一节中，我们证明了模斐波那契数列是纯周期数列. 我们自然想到，在什么条件下，r阶线性递推数列的模数列是纯周期数列?

定理 9.1　已知数列$\{a_n\}$满足

$$a_{n+r}=c_1a_{n+r-1}+c_2a_{n+r-2}+\cdots+c_{r-1}a_{n+1}+c_ra_r(n\geqslant 0),\qquad(1)$$

这里a_0, a_1, $\cdots$, a_{r-1}, c_1, c_2, $\cdots$, c_r都是整数. 如果$(c_r,m)=1$, 则$\{a_n(\bmod m)\}$是纯周期数列.

证　设$a_n\equiv\bar{a}_n(\bmod m)$, $0\leqslant\bar{a}_n\leqslant m-1$, $n\geqslant 0$.

考察有序数组(向量)

$$(\bar{a}_0,\ \bar{a}_1,\ \cdots,\ \bar{a}_{r-1}),\ (\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \cdots,\ \bar{a}_r),\ \cdots$$
$$(\bar{a}_{n-1},\ \bar{a}_n,\ \cdots,\ \bar{a}_{n+r-2}),\ \cdots.\qquad(2)$$

因为在数组(2)中不同的至多只有m^r个，所以在数组(2)的前m^r+1个中至少有两个是相等的. 不妨设

$$(\bar{a}_N,\ \bar{a}_{N+1},\ \cdots,\ \bar{a}_{N+r-1})=(\bar{a}_{N+T},\ \bar{a}_{N+1+T},\ \cdots,\ \bar{a}_{N+r-1+T})(N\geqslant 0,\ N+r-1+T\leqslant m^r+1),$$

从而有

$$\bar{a}_N=\bar{a}_{N+T},\ \bar{a}_{N+1}=\bar{a}_{N+1+T},\ \cdots,\ \bar{a}_{N+r-1}=\bar{a}_{N+r-1+T}.$$

因为

$$c_r\bar{a}_{N-1}\equiv\bar{a}_{N+r-1}-(c_1\bar{a}_{N+r-2}+c_2\bar{a}_{N+r-3}+\cdots+c_{r-1}\bar{a}_N)\pmod{m},$$

$$c_r\bar{a}_{N-1+T}\equiv\bar{a}_{N+r-1+T}-(c_1\bar{a}_{N+r-2+T}+c_2\bar{a}_{N+r-3+T}+\cdots+c_{r-1}\bar{a}_{N+T})\pmod{m},$$

所以

$$c_r\bar{a}_{N-1}\equiv c_r\bar{a}_{r-1+T}\pmod{m}.$$

因为

$$(c_r,\ m)=1,$$

所以

$$\bar{a}_{N-1}=\bar{a}_{N-1+T}.$$

如此倒退 N 次，我们得到

$$\bar{a}_0=\bar{a}_T,\ \bar{a}_1=\bar{a}_{T+1},\ \cdots,\ \bar{a}_{r-1}=\bar{a}_{r-1+T},$$

接下来，我们就可以用数学归纳法证明，对一切非负整数n，$\bar{a}_{n+T}=\bar{a}_n$ 恒成立，即$\{a_n\pmod{m}\}$是纯周期数列.

推论 1 若p为素数，$c_r\not\equiv0\pmod{p}$，则$\{a_n\pmod{p}\}$是纯周期数列.

推论 2 若$c_r=\pm1$，则$\{a_n\pmod{m}\}$是纯周期数列.

定义 若$a_0=a_1=\cdots=a_{r-2}=0$，$a_{r-1}=1$，

$$a_{n+r}=c_1a_{n+r-1}+c_2a_{n+r-2}+\cdots+c_{r-1}a_{n+1}+c_ra_n\ (n\geqslant0),$$

则称这个数列是这个递推式的“本性数列”. 斐波那契数列是由它那个递推式确定的本性数列.

定理 9.2 已知本性数列 $a_0=a_1=\cdots=a_{r-2}=0$，$a_{r-1}=1$，$a_{n+r}=c_1a_{n+r-1}+c_2a_{n+r-2}+\cdots+c_{r-1}a_{n+1}+c_ra_n\ (n\geqslant0)$. 则$\{a_n\pmod{m}\}$是纯周期数列的充要条件是$(m,\ c_r)=1$.

证 由定理 9.1 知充分性已成立，只须证必要性.

设 $\{a_n(\mathrm{mod}\,m)\}$是纯周期数列．下用反证法．

假设 $(m,\ c_r)=d\neq1$．由已知

$$a_{n+T}\equiv a_n(\mathrm{mod}\,m)$$

对一切非负整数 n 成立．因为 $d|m$，所以

$$a_{n+T}\equiv a_n(\mathrm{mod}\,d)$$

对一切$n\geqslant0$成立，即 $\{a_n(\mathrm{mod}\,d)\}$是纯周期数列，设其周期为$T(d)$，则

$$a_{T(d)}\equiv a_0\equiv0,\ a_{T(d)+1}\equiv a_1\equiv0,\ \cdots,$$
$$a_{T(d)+r-2}\equiv a_{r-2}\equiv0(\mathrm{mod}\,d).$$

因为

$$d|c_r,$$

所以

$$\begin{aligned}a_{T(d)+r-1}&=c_1a_{T(d)+r-2}+c_2a_{T(d)+r-3}+\cdots\\&\quad+c_{r-1}a_{T(d)}+c_ra_{T(d)-1}\\&\equiv c_1a_{r-2}+c_2a_{r-3}+\cdots+c_{r-1}a_0\\&\equiv0(\mathrm{mod}\,d).\end{aligned}$$

又 $a_{T(d)+r-1}\equiv a_{r-1}\equiv1(\mathrm{mod}\,d)$，矛盾，故 $d=1$，即$(c_r,\ m)=1$．证毕．

定理 9.3 若$(a,\ m)=1$，则 $\{a^n(\mathrm{mod}m)\}$ 是纯周期数列，$\varphi(m)$是它的一个周期，这里 $\varphi(m)$是欧拉函数．

证 设 $a_n=a^n$，则 $a_n=a\cdot a_{n-1}$．因为$(a,\ m)=1$，所以由定理 9.1，$\{a^n(\mathrm{mod}m)\}$是纯周期数列．

又由欧拉定理，

$$a^{\varphi(m)}\equiv1(\mathrm{mod}m),$$

故有

$$a_{n+\varphi(m)}=a^{n+\varphi(m)}\equiv a^n\equiv a_n(\mathrm{mod}m),$$

所以，$\{a^n(\mathrm{mod}m)\}$是纯周期数列，$\varphi(m)$是它的一个周期．

特别地，当 $m=p$ 是素数时，$\{a^n(\bmod p)\}$ 是纯周期数列，$\varphi(m)=p-1$ 是它的一个周期.

定理 9.3 中的 $\varphi(m)$ 和 $p-1$ 是一个周期，但不一定是最小周期，如 $\{2^n(\bmod 7)\}$：2，4，1，2，4，1，… 是周期为 3 的纯周期数列，但 $p-1=7-1=6$.

推论 1 对一切自然数 a，$\{a^n(\bmod 10)\}$ 的公共周期为 4.

证 对一切自然数 a，$\{a^n(\bmod 5)\}$ 的公共周期为 $5-1=4$，$\{a^n(\bmod 2)\}$ 的公共周期为 1（只需观察奇偶性即可），由定理 7.6，$\{a^n(\bmod 10)\}$ 的公共周期为 $[4, 1]=4$.

推论 2 $\{n^n(\bmod 10)\}$ 是周期为 20 的纯周期数列.

事实上，由 $\{n^l(\bmod 10)\}$ 是周期为 10 的纯周期数列，以及对一切自然数 a，$\{a^n(\bmod 10)\}$ 的公共周期为 4，可以推得 $\{n^n(\bmod 10)\}$ 是周期为 $[10, 4]=20$ 的纯周期数列.

此外，下面的结论显然是成立的.

推论 3 若 p 为素数，则 $\{n^n(\bmod p)\}$ 是纯周期数列，周期为 $p(p-1)$.

例 1

(1) 试求 2^n-1 被 7 整除的所有正整数 n.

(2) 求证 n 为正整数时，2^n+1 不能被 7 整除.

解 (1) 由定理 7.8，$\{2^n(\bmod 7)\}$ 是纯周期数列，它的前若干项为：2，4，1，2，4，1，…，即周期为 3，显然当 $n=3k(k\in \mathrm{N})$ 时，$2^n-1\equiv 0(\bmod 7)$.

(2) 因为 $\{2^n(\bmod 7)\}$：2，4，1，2，4，1，… 是周期为 3 的纯周期数列，所以

$$2^n+1\equiv 3,\ 5\ 或\ 2\not\equiv 0(\bmod 7),$$

故对一切自然数 n，$7\nmid 2^n+1$.

例 2 求出所求小于10的正整数M，使得5整除1989^M+M^{1989}.

解 由定理7.7，$1989^M\equiv 4^M\equiv(-1)^M(\bmod 5)$. 故必须$M\neq 5$，若不然，$1989^M+M^{1989}\equiv(-1)^M\not\equiv 0(\bmod 5)$.
因为

$$M\neq 5,\ 1\leqslant M\leqslant 9,$$

所以

$$5\nmid M.$$

所以由定理7.8

$$M^{1989}\equiv M(\bmod 5),$$

所以

$$1989^M+M^{1989}\equiv(-1)^M+M(\bmod 5),$$

所以

$$M=1 \text{ 或 } M=4.$$

例 3 数1978^n和1978^m的最后三位数相等，试求出正整数m和n，使得$m+n$取最小值(这里$n>m\geqslant 1$).

解 本题的背景是$\{1978^n(\bmod 1000)\}$为周期数列. 如果它是从第N项起的周期为T的周期数列，则可令$m=N$，$n=N+T$，则$(m+n)$的最小值为$2N+T$.

因为$1978^n\equiv 2^n(\bmod 8)$，所以$\{1978^n(\bmod 8)\}$：2，4，0，0，0，… 是从第3项起的周期为1的混周期数列，且当$n\geqslant 3$时，$8|1978^n$.

因为$(1978,125)=1$，所以$\{1978^n(\bmod 125)\}$是纯周期数列，$\varphi(125)=5^3-5^2=100$是它的一个周期.

所以$\{1978^n(\bmod 1000)\}$是从第3项的混周期数列，$T=100$是它的一个周期.

下面我们证明$T=100$是$\{1978^n(\bmod 1000)\}$的最小周

期. 由定理7.3, $\{1978^n(\bmod 1000)\}$ 的最小周期可能是 $T=2, 4, 5, 10, 20, 25, 50$.

因为 $\{1978^n(\bmod 10)\}$ 的周期为4, 所以 $T(1000)\neq 2, 5, 10, 25, 50$. 因为

$$1978^7-1978^3=1978^3(1978^4-1),$$

$$1978^{23}-1978^3=1978^3(1978^{20}-1),$$

$$1978^3\equiv 0(\bmod 8),$$

$$1978^4-1\not\equiv 0(\bmod 125),\quad 1978^{20}-1\not\equiv 0(\bmod 125),$$

所以

$$T(1000)\neq 4 \text{ 或 } 20.$$

所以 $\{1978^n(\bmod 1000)\}$ 是从第3项起的最小周期为100的周期数列, 从而

$$(n+m)_{\text{最小值}}=3+(100+3)=106.$$

关于欧拉函数, 有如下定理.

若 p 是素数, $k\geqslant 1$, 则

$$\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}.$$

根据这个定理, $\varphi(125)=5^3-5^2=100$.

例4 设 $a_1=0$, $2a_{n+1}=3a_n+\sqrt{5a_n^2+4}$ $(n\geqslant 1)$, 证明: 对于 a_n, 不可能有自然数 N, 使 a_{2N} 能被1989整除.

证 由

$$2a_{n+1}=3a_n+\sqrt{5a_n^2+4}$$

移项、平方整理得

$$a_{n+1}^2-3a_n\cdot a_{n+1}+(a_n^2-1)=0. \qquad (1)$$

改变(1)的下标, 整理得

$$a_{n-1}^2-3a_n\cdot a_{n-1}+(a_n^2-1)=0. \qquad (2)$$

由(1)、(2)两式可知, a_{n+1}, a_{n-1} 是方程

$$t^2-3a_n\cdot t+(a_n^2-1)=0$$

的两根, 故有

$$a_{n+1}+a_{n-1}=3a_n,$$

即

$$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}(n\geqslant 3). \qquad (3)$$

因为$(-1, m)=1$，所以$\{a_n(\bmod m)\}$对任何m都是纯周期数列.

现在的问题是选取m，因为$1989=3^2\times 221$，所以我们首先想到取$m=3$.

由(3)，

$$a_n\equiv 2a_{n-2}(\bmod 3).$$

因为$a_1=0$，$a_2=1$，所以$\{a_n(\bmod 3)\}$：0，1，3，2，0，1，3，2，…是周期为4的纯周期数列，且

$$a_{2n}\equiv 1\text{ 或 }2(\bmod 3),$$

即$a_{2n}\not\equiv 0(\bmod 3)$. 故不存在$N$，使$a_{2N}$被1989整除.

例 5 设x_1，x_2是方程$x^2-6x+1=0$的两根，试证：对任何自然数n，$x_1^n+x_2^n$都是整数，但不是5的倍数.

证 由已知

$$x_1+x_2=6,\ x_1\cdot x_2=1,$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=34.$$

$$\begin{aligned}x_1^n+x_2^n&=(x_1+x_2)(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})\\&\quad-x_1\cdot x_2(x_1^{n-2}+x_2^{n-2})\\&=6(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})-(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}),\qquad(1)\end{aligned}$$

通过上式，易用归纳法证明$x_1^n+x_2^n(n\geqslant 1)$都是整数.

设 $a_n\equiv x_1^n+x_2^n(\bmod 5)$，则由(1)式得

$$a_n\equiv a_{n-1}-a_{n-2}(\bmod 5),$$

由第三节例1可知，它是周期为6的纯周期数列. 因为$\{a_n(\bmod 5)\}$的前6项为：1，4，3，4，1，2，所以，

$$x_1^n+x_2^n\not\equiv 0(\bmod 5),\ n\geqslant 1.$$

因此 $x_1^n+x_2^n(n\geqslant 1)$是整数，但不是5的倍数.

例 6 已知 $v_0=0$，$v_1=1$，$v_{n+1}=8v_n-v_{n-1}$ $(n\geqslant 1)$. 求证：数列$\{v_n\}$中没有形如$3^\alpha 5^\beta(\alpha,\ \beta\in \mathrm{N})$的项.

证 因为 $(-1,\ m)=1$，所以 $\{v_n(\bmod m)\}$ 对任何自然数m都是纯周期数列. 因为

$$v_{n+1}\equiv 2v_n-v_{n-1}(\bmod 3),$$

又 $\{v_n(\bmod 3)\}$：0，1，2，0，1，2，…，所以

$$3|v_n \Longleftrightarrow 3|n.$$

因为

$$v_{n+1}=v_n-v_{n-1}(\bmod 7)\ （显然周期为6）,$$

$$\{v_n(\bmod 7)\}：0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 6,\ 6,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 6,\ 6,\ 0,\ \cdots,$$

所以

$$3|v_n \Longleftrightarrow 7|v_n.$$

这样，含有因数3的项必含有因数7，因此，数列$\{v_n\}$中没有形如$3^\alpha 5^\beta$的项.

例 7 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 两个整数序列定义如下：

$$x_0=1,\ x_1=1,\ x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$y_0=1,\ y_1=7,\ y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

证明：除"1"外，这两个数列没有其他相同的项.

证 $\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是递推数列，且$n\geqslant 1$时，$y_n>x_n$，但这并不排除$x_n=y_m(n>m)$. 我们现在有一个很有用的"武器"，那就是"递推数列的模数列"是周期数列. 如果我们能找到同一个模m，使$\{x_n(\bmod m)\}$和$\{y_n(\bmod m)\}$中的项各不相同，这就证明了本题. 经过几次尝试，我们有

$$\{x_n(\bmod 8)\}：1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5,\ \cdots,$$

$$\{y_n(\bmod 8)\}：1,\ 7,\ 1,\ 7,\ 1,\ 7,\ \cdots,$$

即$\{x_n(\mathrm{mod}8)\}$是从第3项起的周期为2的混周期数列(这是因为$(2,\ 8)\neq1$)，$\{y_n(\mathrm{mod}8)\}$是周期为2的纯周期数列.

因为$x_1\neq y_1$，又当$n\geqslant2$时，$\{x_n(\mathrm{mod}8)\}$和$\{y_n(\mathrm{mod}8)\}$没有相同的项，所以，除第1项"1"以外，$\{x_n\}$和$\{y_n\}$中再也没有相同的项.

例 8 试证：对任何非负整数n，和数

$$\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被5整除.

证 设

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}=\frac{1}{\sqrt{8}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1},$$

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{8}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k},$$

则由二项式定理，得

$$x_n+y_n=\frac{1}{\sqrt{8}}(\sqrt{8}+1)^{2n+1},$$

$$x_n-y_n=\frac{1}{\sqrt{8}}(\sqrt{8}-1)^{2n+1}.$$

所以

$$x_n=\frac{1}{2\sqrt{8}}[(\sqrt{8}+1)^{2n+1}+(\sqrt{8}-1)^{2n+1}],$$

为了同二阶线性递推数列的通项公式进行对照，我们把上式化为

$$x_n=\frac{2\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}}(9+4\sqrt{2})^n+\frac{2\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}}(9-4\sqrt{2})^n.$$

由上式看出，$\{x_n\}$ 所满足的特征方程的特征根为 $x_1=9+4\sqrt{2}$，$x_2=9-4\sqrt{2}$，故特征方程是

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0,$$

即

$$x_2=18x-49,$$

故 $\{x_n\}$ 所满足的递推式为

$$x_n=18x_{n-1}-49x_{n-2}(n\geqslant 2),$$

因为 $(-49,\ 5)=1$，所以 $\{x_n(\bmod 5)\}$ 是纯周期数列．由

$$x_0=1,\ x_2=C_3^1+2^3C_3^3=11,\ x_n\equiv 3x_{n-1}+x_{n-2}(\bmod 5)$$

得

$$\{x_n(\bmod 5)\}:1,\ 1,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 4,\ 4,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3;\ 1,\ 1,\ 4,\ \cdots,$$

即 $\{x_n(\bmod 5)\}$ 是周期为 12 的纯周期数列，它的前 12 项中不含 0，所以，对于任何非负整数 n，$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$ 不能被 5 整除．

例 9 找出数 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$ 的十进制中紧靠着小数点右面一位数字（即第一位小数）和左面一位数字（即个位数）．并证明你的结论．

解 设 $A=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$ 及被加强了的辅助数列

$$x_n=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n}$$
$$=(5+2\sqrt{6})^n+(5-2\sqrt{6})^n.$$

类似上一例的解法，$\{x_n\}$ 满足

$$x_1=10,\ x_2=98,\ x_n=10x_{n-1}-x_{n-2}(n\geqslant 3).$$

因为 $(-1,\ m)=1$，所以 $\{x_n(\bmod m)\}$ 是纯周期数列．

因为本题要考虑十进制的个位数问题，所以我们取 m

$=10$. 由

$$x_{n+4}\equiv -x_{n+2}\equiv x_n(\bmod 10),$$

知$\{x_n(\bmod 10\}$是周期为4的纯周期数列. 因为

$$x_1=10,\ x_2=98,$$

所以

$$\{x_n(\bmod 10)\}:\ 0,\ 8,\ 0,\ 2,\ 0,\ 8,\ 0,\ 2,\ \cdots.$$

因此

$$x_{990}\equiv x_2\equiv 8(\bmod 10).$$

因为

$$0<5-2\sqrt{6}<0.2,$$

$$N=x_{999}-(5-2\sqrt{6})^{990},$$

所以 N的个位数字为7. 又

$$0<(5-2\sqrt{6})^{990}<0.2^{990}=0.008^{330}<0.01^{330}$$

$$=0.\underbrace{000\cdots0}_{630\text{个}0}1,$$

所以 N的第一位小数为9.

例 10 设a是方程$x^3-3x^2+1=0$的最大正根. 求证: 17可以整除$[a^{1788}]$和$[a^{1988}]$, 这里$[x]$表示不超过x的最大整数.

证 设$f(x)=x^3-3x^2+1$. 因为$f(-1)=-3<0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}>0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}>0$, $f(1)=-1<0$, $f(2\sqrt{2})=16\sqrt{2}-23<0$, $f(3)=1>0$, 所以$f(x)=0$有三实根λ, μ和$a(\lambda<\mu<a)$, 且

$$-1<\lambda<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\mu<1,\quad 2\sqrt{2}<a<3,$$

$$0<|\lambda|,\ \mu<1.$$

因为

$$\lambda+\mu+a=3,\ \lambda\mu a=-1,\ \lambda\mu+\lambda a+\mu a=0,$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda^2+\mu^2&=(\lambda+\mu)^2-2\lambda\mu\\&=(3-a)^2+\frac{2}{a}=9+\frac{2-6a^2+a^3}{a}\\&=9+\frac{-2a^3+a^3}{a}\ (\text{因 } 2-6a^2=-2a^3)\\&=1+(8-a^2)\\&<1\quad(\text{因 } a^2>(2\sqrt{2})^2=8).\end{aligned}$$

因为 $x^3-3x^2+1=0$ 恰好是递推数列 $u_{n+3}=3u_{n+2}-u_n$ 的特征方程，所以

$$u_n=p_1\lambda^n+p_2\mu^n+p_3a^n,$$

如令

$$u_0=3,\ u_1=\lambda+\mu+a=3,$$

$$u_2=\lambda^2+\mu^2+a^2=(\lambda+\mu+a)^2-2(\lambda\mu+\lambda a+\mu a)=9,$$

则有

$$u_n=\lambda^n+\mu^n+a^n(n\geqslant 0).\tag{1}$$

由 $u_0=3$，$u_1=3$，$u_2=9$，$u_{n+3}=3u_{n+2}-u_n(n\geqslant 0)$ 可以知道，对一切非负整数 n，u_n 都是整数.

很明显，若有 $0<\lambda^n+\mu^n<1(n\in N)$成立，则由 $a^n=u_n-(\lambda^n+\mu^n)$ 得知

$$[a^n]=u_n-1.$$

事实上，$n=1$ 时，$0<\lambda+\mu=3-a<1$（因 $2\sqrt{2}<a<3$）、且 $|\lambda|<\mu$. 前已证 $0<\lambda^2+\mu^2<1$，当 $n>2$ 时，因为 $0<|\lambda|<\mu<1$，所以

$$0<\lambda^n+\mu^n<\lambda^2+\mu^2<1.$$

因为

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-u_n,\ (-1,\ 17)=1,$$

所以 $\{u_n(\bmod 17)\}$ 是纯周期数列.

又因为 $\{u_n(\bmod 17)\}$: 3, 3, 9, 7, 1, 11, 9, 9, 16, 5, 6, 2, 1, 14, 16, 0; 3, 3, 9; …, 所以 $\{u_n(\bmod 17)\}$ 是周期为 16 的纯周期数列，且

$$u_4\equiv 1\ (\bmod 17),\ u_{12}\equiv 1\ (\bmod 17).$$

从而

$$u_{1788}\equiv u_{12}\equiv 1(\bmod 17),$$

$$u_{1988}\equiv u_4\equiv 1(\bmod 17),$$

所以

$$[a^{1788}]=u_{1788}-1\equiv 0(\bmod 17),$$

$$[a^{1988}]=u_{1988}-1\equiv 0(\bmod 17).$$

例 11 已知 a_0, a_1 是不全为零的整数，

$$a_{n+2}=ca_{n+1}+da_n(n\geqslant 0), \tag{1}$$

且对任何自然数 m, $\{a_n(\bmod m)\}$都是纯周期数列，则

(i) $(c,\ d)=1$.

(ii) 若 $x^2-cx-d=0$ 有整数根，则必有 $d=\pm 1$.

证 (i)(反证法)设 $p|(c,\ d)$, 且 p 为素数，并设 $p^k\|(a_0,\ a_1)$, $k\geqslant 0$, 即

$$p^k|(a_0,\ a_1),\ p^{k+1}\nmid(a_0,\ a_1).$$

由 $p^k|(a_0,\ a_1)$推出 $a_0\equiv 0$, $a_1\equiv 0(\bmod p^k)$, 从而由(1)式推出

$$a_n\equiv 0(\bmod p^k)$$

对一切非负整数 n 成立.

又由 $p|(c,\ d)$, 推出 $c\equiv 0$, $d\equiv 0(\bmod p)$, 从而有

$$a_{n+2}\equiv ca_{n+1}+da_n\equiv 0(\bmod p^{k+1}),\ n\geqslant 0,$$

这说明 $\{a_n(\bmod p^{k+1})\}$ 的周期为 1，因为 $\{a_n(\bmod m)\}$ 对任何自然数 m 是纯周期数列，所以，

$$a_0\equiv 0,\ a_1\equiv 0(\bmod p^{k+1}).$$

这与所设 $p^{k+1}\nmid(a_0,\ a_1)$ 矛盾，故 $(c,\ d)=1$.

（ii）因为方程 $x^2-cx-d=0$ 有整数根，又 c 为整数，故两根均为整数. 设两根为 α，β，则

$$\alpha+\beta=c,\ \alpha\beta=-d.$$

所以

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n,$$

由此得

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1}), \qquad (2)$$

和

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\beta a_{n-1}). \qquad (3)$$

在(2)中，设 $b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$，则

$$b_n=\beta b_{n-1}.$$

因为 $\{a_n(\bmod m)\}$ 对一切 m 是纯周期数列，所以 $\{b_n(\bmod m)\}$ 对一切 m 是纯周期数列. 由(i)的结论，$(\beta,\ 0)=1$，故 $\beta=\pm 1$.

对(3)式作同样的讨论，同理可得 $\alpha=\pm 1$.

因为 $d=-\alpha\beta$，所以 $d=\pm 1$.

本题是定理 9.1 推论 2 的逆命题.

例 12 求 a^{100} 的末三位数字，其中 a 为自然数.

解 考虑数列 $\{a^n(\bmod 1000)\}$. 如果 $(a,\ 5)=1$，$(a,\ 2)=1$，则 $\{a^n(\bmod 5^3)\}$ 是一个周期为 $\varphi(5^3)=5^3-5^2=100$ 的纯周期数列，$\{a^n(\bmod 2^3)\}$ 是一个周期为 $\varphi(2^3)=2^3-2^2=4$ 的纯周期数列，且 $a^{\varphi(125)}\equiv 1(\bmod 125)$，$a^{\varphi(2^3)}\equiv 1(\bmod 8)$，从而有 $\{a^n(\bmod 1000)\}$ 是周期为 100 的纯周期数列，且 a^{100}

$\equiv 1 (\bmod 1000)$．也就是说，当 a 的个位数字为 1，3，7，9 时，$a^{100} \equiv 1 (\bmod 1000)$，此时，$a^{100}$ 的最后三位数字是 0，0，1．

下面讨论三种余下的情况．

（1）a 的个位数字为 0，则 a^{100} 的末三位是 0，0，0；

（2）若 a 的个位数字为 5．因为 $a^{100} \equiv 0 (\bmod 5^3)$，$a^{100} \equiv 1 (\bmod 2^3)$，所以 $a^{100} \equiv 5^4 \equiv 625 (\bmod 10^3)$，即 a^{100} 的末三位数是 625；

（3）若 a 的个位数字是 2、4、6 或 8，因为 $a^{100} \equiv 1 (\bmod 5^3)$，$a^{100} \equiv 0 (\bmod 2^3)$，所以 $a^{100} \equiv 376 (\bmod 10^3)$，即 a^{100} 的末三位数是 376．

例 13 求证对每个正整数 m，都存在整数 $n>m$，使 5^n 的 10 进制表示由 5^m 的 10 进制表示或在右端加上某些数字而得到．

证 显然，当 $n>m$ 时，我们有

$$5^n \equiv 5^m (\bmod 10^m)$$

$$\Longleftrightarrow 5^{n-m} \equiv 1 (\bmod 2^m).$$

因为 $(5, 2)=1$，所以 $\{5^n (\bmod 2^m)\}$ 是纯周期数列，$T=\varphi(2^m)=2^{m-1}$ 是它的一个周期，而且有

$$5^T = 5^{\varphi(2^m)} \equiv 1 (\bmod 2^m).$$

令 $n=m+T=m+2^{m-1}$，则有 $5^n \equiv 5^m (\bmod 10^m)$，即 5^n 由 5^m 在右端加上某些数字而得到（在 10 进制中）．

例 14 在 $1 \leqslant n \leqslant 10^6$ 之间有多少个 n，使

$$2^n \equiv n (\bmod 5)?$$

解 因为 $\{2^n (\bmod 5)\}$：2，4，3，1，2，4，3，1，… 是周期 $T=\varphi(5)=4$ 的纯周期数列，$\{n (\bmod 5)\}$：1，2，3，

4，0，1，2，3，4，0，… 是周期为5的纯周期数列，所以 $2^n\equiv n(\bmod 5)\Longleftrightarrow n=3,\ 14,\ 16,\ 17(\bmod 20)$.

所以 在 $1\leqslant n\leqslant 10^6$ 之间有 $4\cdot(10^6/20)=2\cdot 10^5$ 个 n，使 $2^n\equiv n(\bmod 5)$.

例 15 设 a，b，x_0 都是正整数，定义

$$x_n=ax_{n-1}+b,\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

证明：$\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 不可能都是素数.

证 假设 x_1，x_2，…，x_n，…都是素数. 因为 $x_2=ax^1+b$，x_1，x_2 都是素数，所以 $(a,\ b)=1$，进一步推出 $(a,\ x_2)=1$. 从而 $\{x_n(\bmod x_2)\}$ 是纯周期数列，即存在 T，使

$$x_{T+2}\equiv x_2\equiv 0(\bmod x_2).$$

这与 x_{T+2} 是素数矛盾，故 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 不可能都是素数.

10　和数列的周期性

设 S_n 是整数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和. 在第4节中，我们研究了 $\{a_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 的周期性关系，得到了两个结论. 在这里，我们将看到 $\{a_n(\bmod m)\}$ 和 $\{S_n(\bmod m)\}$ 有"更好"的周期性关系及广泛的应用.

定理 10.1 设 $\{a_n(\bmod m)\}$ 是从第 N 项起的周期为 $T=T(m)$ 的周期数列，且 $a_N+a_{N+1}+\cdots+a_{N+T-1}\equiv A(\bmod m)$，则 $\{S_n(\bmod m)\}$ 是从第 $N-1$ 项起的周期数列，且

（i）$A\equiv 0(\bmod m)$ 时，$\{S_n(\bmod m)\}$ 的周期为 T；

（ii）$A\not\equiv 0(\bmod m)$ 时，$\{S_n(\bmod m)\}$ 的周期为 $\dfrac{m}{(A,\ m)}\cdot T$.

证 因为 $\{a_n(\bmod m)\}$ 是从第 N 项起的周期为 T 的周期

数列，所以

$$\begin{aligned}&S_{n-1+kT}-S_{n-1}\ (n\geqslant N)\\&\quad=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n-1+kT}\ (\text{恰有 }k\text{ 个周期段})\\&\quad\equiv k(a_N+a_{N+1}+\cdots+a_{N+T-1})\\&\quad\equiv kA(\bmod m).\end{aligned}\tag{1}$$

（i）若$A\equiv0(\bmod m)$，则在（1）中取$k=1$，从而有

$$S_{n+T}\equiv S_n\ (\bmod m)$$

对一切$n\geqslant N-1$的自然数成立，即$\{S_n(\bmod m)\}$是从第$N-1$项起的周期数列，T是它的一个周期．若它的最小周期$T'<T$，则有

$$S_{n+T'}\equiv S_n(\bmod m),\ n\geqslant N-1,$$

又有

$$S_{n-1+T}\equiv S_{n-1}(\bmod m),\ n\geqslant N,$$

两式相减得

$$a_{n+T'}\equiv a_n(\bmod m),\ n\geqslant N,$$

这与所设$\{a_n(\bmod m)\}$的周期为T矛盾．故$\{S_n(\bmod m)\}$的周期亦为T．

（ii）若$A\not\equiv0(\bmod m)$，（1）中在$kA\equiv0(\bmod m)$最小的$k=\dfrac{m}{(A,\ m)}$．由（1）式得

$$S_{n+kT}\equiv S_n(\bmod m),\ n\geqslant N-1,$$

即$\{S_n(\bmod m)\}$是从第$N-1$项起的周期数列，kT是它的一个周期．假设$\{S_n(\bmod m)\}$的最小周期为T'，则$T'|kT$．由（i）的证明可知有

$$a_{n+T'}\equiv a_n(\bmod m),\ n\geqslant N,$$

由定理7.3知$T|T'$，不妨设$T'=k'T$．因为$T'|kT$，所以$k'|k$．

由$k'T$是$\{S_n(\bmod m)\}$的周期，得

三戊

$$S_{n-1+k'T}-S_{n-1}\equiv k'A\equiv 0(\bmod m),\quad n\geqslant N.$$

所以 $k|k'$，从而 $k=k'$.

因此当 $A\not\equiv 0(\bmod m)$ 时，$\{S_n(\bmod m)\}$ 是从第 $N-1$ 项起的周期为$\frac{mT}{(A,\ m)}$的周期数列.

特别地，若$(A,\ m)=1$，则周期为 mT.

再加一点说明，(i)是包括在(ii)中的，这是因为 $A\equiv 0(\bmod m)$，则$\frac{mT}{(A,\ m)}=T$. 这里附设(i)只是为了使证明有一个阶梯.

定理 10.2 若 $\{S_n(\bmod m)\}$ 是从第 N 项起的周期为 T 的周期数列，则$\{a_n(\bmod m)\}$ 是从第 $N+1$ 项起的周期数列，且 $a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+T}\equiv 0(\bmod m)$.

证 因为

$$S_n-S_{n-1}\equiv a_n(\bmod m),\quad n\geqslant N+1,$$

所以

$$\begin{aligned}a_{n+T}&\equiv S_{n+T}-S_{n-1+T}\\&\equiv S_n-S_{n-1}\\&\equiv a_n(\bmod m),\quad n\geqslant N+1.\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}0&\equiv S_{n+T}-S_n(n\geqslant N)\\&\equiv a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+T}\ (\text{恰好是一个周期段})\\&\equiv a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+T},\end{aligned}$$

所以 $\{a_n(\bmod m)\}$ 是从第 $N+1$ 起的周期数列，且 $a_{N+1}+\cdots+a_{N+T}=0$，T 是它的一个周期，但不一定是最小周期. 这个判断可从定理 10.1 的证明得知.

下面，我们利用定理 10.1 来研究自然数在十进制中的

末位数问题．为了需要，先列出表 3，表中的数是 $\{n^j(\mathrm{mod}\ 10)\}$所对应的数．

表 3

	1^n	2^n	3^n	4^n	5^n	6^n	7^n	8^n	9^n
$n=1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n=2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$n=3$	1	8	7	4	5	6	3	2	9
$n=4$	1	6	1	6	5	6	1	6	1
$n=5$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

从表中看出

$$\sum_{n=1}^{10} n\equiv 5(\mathrm{mod}10),\quad \sum_{n=1}^{10} n^2\equiv 5(\mathrm{mod}10);$$

$$\sum_{n=1}^{10} n^3\equiv 5(\mathrm{mod}10),\quad \sum_{n=1}^{10} n^4\equiv 3(\mathrm{mod}10).$$

例 1 设 $a_n=n^2(n\geqslant 1)$，$S_n\equiv a_1+a_2+\cdots+a_n(\mathrm{mod}10)$，$0\leqslant S_n\leqslant 9$．求证：$0.S_1S_2\cdots S_n\cdots$是有理数．

证 要证 $0.S_1S_2\cdots S_n\cdots$是有理数，只须证 $\{S_n(\mathrm{mod}10)\}$是周期数列即可．

由定理 7.7，$\{a_n(\mathrm{mod}10)\}$是周期为 10 的纯周期数列，且 $a_1+a_2+\cdots+a_T=1^2+2^2+\cdots+10^2\equiv 5(\mathrm{mod}10)$，$2(a_1+a_2+\cdots+a_{10})\equiv 0(\mathrm{mod}10)$，故由定理 10.1，$\{S_n(\mathrm{mod}10)\}$是周期为 20 的纯周期数列．所以 $0.S_1S_2\cdots S_n\cdots$是循环节为 20 的纯循环小数．即$0.S_1S_2\cdots S_n\cdots$是有理数．

把本题中的 n^2 换成 n 结论是相同的．请读者自证．

例 2 设 $a_n=n^4$，$S_n\equiv\sum_{k=1}^{n}a_k \pmod{10}$，$0\leqslant S_n\leqslant 9$. 求证：$0.S_1S_2\cdots S_n\cdots$ 是有理数.

证 因为 $\{n^4 \pmod{10}\}$ 是周期为 10 的纯周期数列，且

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\sum_{n=1}^{10}n^4\equiv 3 \pmod{10},$$

$$(10(a_1+a_2+\cdots+a_{10})\equiv 0 \pmod{10},$$

所以由定理10.1，$\{S_n \pmod{10}\}$ 是周期为 $10\times 10=100$ 的纯周期数列，即 $0.S_1S_2\cdots S_n\cdots$ 是有理数.

例 3 设 $a_n=n^{n!}$，$S_n\equiv\sum_{k=1}^{n}a_k \pmod{10}$，$0\leqslant S_n\leqslant 9$，求证：$0.S_1S_2\cdots S_n\cdots$ 是混循环小数.

证 因为 $n\geqslant 4$ 时，$n^{n!}\equiv n^4 \pmod{10}$（由定理 7.8 的推论 2），又 $\{n^4 \pmod{10}\}$ 是周期为 10 的纯周期数列，所以 $\{n^{n!} \pmod{10}\}$ 是从第 4 项起的周期为 10 的混周期数列. 于是由定理 10.1，$\{S_n \pmod{10}\}$是从第 3 项起的周期数列.

因为

$$a_4+a_5+\cdots+a_{13}\equiv\sum_{n=4}^{13}n^4 \text{（恰好一个周期长）}$$

$$\equiv\sum_{n=1}^{10}n^4\equiv 3 \pmod{10},$$

所以

$$10\cdot(a_4+a_5+\cdots+a_{13})\equiv 0 \pmod{10}.$$

所以 $\{S_n \pmod{10}\}$ 是从第 3 项起的周期为$10\times 10=100$ 的混周期数列，即 $0.S_1S_2\cdots S_n\cdots$是从小数点第三位起的循环节为 100 的混循环小数.

例 4 设 $a_n=n^n$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，试判断 $\{S_n \pmod{10}\}$ 的周期性.

证　由定理 7.8 的推论 3，$\{n^n(\bmod 10)\}$ 是周期为 20 的纯周期数列，又

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\cdots+a_{20}&\equiv 1^1+2^2+3^3+4^4\\&\quad+5+6^2+7^3+8^4\\&\quad+\cdots\\&\quad+17+18^2+19^3+20^4\\&\equiv 4(\bmod 10),\end{aligned}$$

$$5\times(a_1+a_2+\cdots+a_{20})\equiv 0(\bmod 10),$$

所以 $\{S_n(\bmod 10)\}$ 是周期为 100 的纯周期数列.

例 5　设数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=1^1+2^2+3^3+\cdots+n^n,$$

证明：数列$\{a_n\}$中有无限多项为奇合数.

证　设 $b_n=n^n(n\geqslant 1)$，a_n 是 $\{b_n\}$的前 n 项之和. 因为

$\{b_n(\bmod 2)\}$：1，0，1，0，1，0，…，

$\{b_n(\bmod 3)\}$：1，1，0，1，2，0；1，1，0，1，2，0，…，

所以，$\{b_n(\bmod 2)\}$ 是周期为 2 的纯周期数列，$\{b_n(\bmod 3)\}$ 是周期为 6 的纯周期数列，故由定理10.1可知$\{a_n(\bmod 2)\}$，$\{a_n(\bmod 3)\}$都是纯周期数列.

因为

$\{a_n(\bmod 2)\}$：1，1，0，0；1，1，0，0，…

$\{a_n(\bmod 3)\}$：1，2，2，0，2，2，0，1，1，2，1，1，2，0，0，1，0，0；1，2，2，0，2，2，…，

所以 $\{a_n(\bmod 2)\}$是周期为 4 的纯周期数列，$\{a_n(\bmod 3)\}$ 是周期为 18 的纯周期数列.

因为

$$a_{36k+14}\equiv a_{14}\equiv a_2\equiv 1(\bmod 2),$$

$$a_{36k+14}\equiv a_{14}\equiv 0(\bmod 3),$$

又当$n>1$时，$a_n>3$，所以a_{36k+4}是奇合数（$k=0$，1，2，…），即数列$\{a_n\}$中有无限多项为奇合数．

11　周期与初始项无关

在第8节中，我们给出了斐波那契型的数列

$$v_n=v_{n-1}+v_{n-2}(n\geqslant 0)$$

的模数列$\{v_n(\bmod m)\}$的周期与初始项无关的充分条件．我们更关心的是关于一般的r阶线性递推数列的模数列的周期与初始项无关的条件．下面从二阶着手．

给出数列$\{v_n\}$：$v_0=a_0$，$v_1=a_1$，$v_n=c_1v_{n-1}+c_2v_{n-2}(n\geqslant 2)$，其中$(c_2, m)=1$，则由定理9.1，$\{v_n(\bmod m)\}$是纯周期数列．

观察数列$\{v_n\}$的前若干项

$v_0=a_0$，$v_1=a_1$，$v_2=c_1a_1+c_2a_0$，$v_3=(c_1^2+c_2)a_1+c_1c_2a_0$，

$v_4=(c_1^3+2c_1c_2)a_1+(c_1^2c_2+c_2^2)a_0$，…，

并给出对照的数列$\{u_n'\}$：$u_0'=1$，$u_1'=0$，$u_n'=c_1u_{n-1}'+c_2u_{n-2}'(n\geqslant 2)$，它的前若干项是

$u_0'=1$，$u_1'=0$，$u_2'=c_2$，$u_3'=c_1c_2$，$u_4'=c_1^2c_2+c_2^2$，…；

$\{u_n''\}$：$u_0''=0$，$u_1''=1$，$u_n''=c_1u_{n-1}''+c_2u_{n-2}''(n\geqslant 2)$，它的前若干项是：

$u_0''=0$，$u_1''=1$，$u_2''=c_1$，$u_3''=c_1^2+c_2$，

$u_4''=c_1^3+2c_1$，…，

仔细一对照，我们发现有如下关系

$$v_n=a_0u_n'+a_1u_n''(n\geqslant 0)\text{，}\qquad (1)$$

我们用数学归纳法证明(1)式．

归纳法的奠基成立；假设$n\leqslant k$时，(1)式成立．$n=k$

$+1$ 时，

$$\begin{aligned}v_{k+1}&=c_1v_k+c_2v_{k-1}\\&=c_1(a_0u_k'+a_1u_k'')+c_2(a_0u_{k-1}'+a_1u_{k-1}'')\\&=a_0(c_1u_k'+c_2u_{k-1}')+a_1(c_1u_k''+c_2u_{k-1}'')\\&=a_0u_{k+1}'+a_1u_{k+1}''.\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时，(1)式成立，故对一切非负整数 n，(1)式成立.

我们进一步发现有如下关系式

$$u_n'=c_2u_{n-1}''(n\geqslant1), \tag{2}$$

这也可以用数学归纳法证明，证明留给读者.

把(2)代入(1)，我们得到

$$v_n=a_1u_n''+a_0c_2u_{n-1}''(n\geqslant1). \tag{3}$$

有了(3)式，我们就可以仿照第8节的例3，用 v_n 和 v_{n+1} 来表示 u_n''. 因为

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=a_1u_{n+1}''+a_0c_2u_n''\\&=a_1(c_1u_n''+c_2u_{n-1}'')+a_0c_2u_n''\\&=(a_1c_1+a_0c_2)u_n''+a_1c_2u_{n-1}''.\end{aligned} \tag{4}$$

从(3)、(4)两式消去 u_{n-1}''，得

$$(a_0^2c_2+a_0a_1c_1-a_1^2)u_n''=a_0v_{n+1}-a_1v_n. \tag{5}$$

有了这些准备工作，我们就可着手证明下面的定理.

定理 11.1 已知数列 $v_0=a$，$v_1=b$，$v_n=c_1v_{n-1}+c_2v_{n-2}$ $(n\geqslant2)$，其中 a_0，a_1，c_1，c_2 都是整数，且 $(c_2, m)=1$. 如果 $(a_0\lambda_2+a_0a_1c_1-a_1^2, m)=1$，则 $\{v_n(\bmod m)\}$ 是纯周期数列，且周期与 a_0，a_1 无关.

证 设 $\{v_n\}$ 的本性数列为 $\{u_n\}$：$u_0=0$，$u_1=1$，$u_n=c_1u_{n-1}+c_2u_{n-2}(n\geqslant2)$，则因 $(c_2, m)=1$，故 $\{v_n(\bmod m)\}$ 和 $\{u_n(\bmod m)\}$ 都是纯周期数列，两周期分别为 T' 和 T，则 T

与 a，b 无关.

由(4)式，

$$\begin{aligned} v_{n+T} &\equiv a_1 u_{n+T} + a_0 c_2 u_{n-1+T} \\ &\equiv a_1 u_n + a_0 c_2 u_{n-1} \\ &\equiv v_n \pmod{m}, \end{aligned}$$

即 T 也是 $\{v_n(\mathrm{mod}\,m)\}$ 的一个周期，从而有 $T'|T$.

再由(5)式

$$\begin{aligned} (a_0^2 c_2 + a_0 a_1 c_1 - a_1)^2 v_{n+T'} &\equiv a_0 u_{n+1+T'} - a_1 v_{n+T'} \\ &\equiv a_0 v_{n+1} - a_1 v_n \\ &\equiv (a_0^2 c_2 + a_0 a_1 c_1 - a_1^2) u_n \pmod{m}, \end{aligned}$$

因为

$$(a_0^2 c_2 + a_0 a_1 c_1 - a_1^2,\ m) = 1,$$

所以

$$u_{n+T'} \equiv u_n \pmod{m},$$

即 T' 也是 $\{u_n(\mathrm{mod}\,m)\}$ 的一个周期，故有 $T|T'$. 从而 $T=T'$. 所以 $\{v_n(\mathrm{mod}\,m)\}$ 是纯周期数列，且周期与 a_0，a_1 无关. 定理证毕.

对于三阶线性递推数列 $\{v_n\}$：$v_n = c_1 v_{n-1} + c_2 v_{n-2} + c_3 v_{n-3}$ $(n \geqslant 3)$，它的本性数列是 $\{u_n\}$：$u_0=0$，$u_1=0$，$u_2=1$，$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + c_3 u_{n-3} (n \geqslant 3)$. 仿照定理 11.1 的推导过程，我们可以用数学归纳法证明

$$v_n = v_2 u_n + (v_0 c_3 + v_1 c_2) u_{n-1} + v_1 c_3 u_{n-2}$$

以及

$$\begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} u_n = \begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_n \\ v_1 & v_2 & v_{n+1} \\ v_2 & v_3 & v_{n+2} \end{vmatrix},$$

从而得到如下定理.

定理 11.2 已知数列$\{v_n\}$：$v_0=a_0$，$v_1=a_1$，$v_2=a_2$，$v_n=c_1v_{n-1}+c_2v_{n-2}+c_3v_{n-3}(n\geqslant3)$，且$(c_3, m)=1$. 如果$(D, m)=1$，则$\{v_n(\mathrm{mod}\, m)\}$是纯周期数列，且其周期与初始项$v_0$，$v_1$，$v_2$无关，其中$\{u_n\}$是所给递推式的本性数列，

$$D=\begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}.$$

证明留给读者.

下面，我们把下面的定理推广到r阶.

我们约定，初始项为a_0，a_1，a_2，$\cdots$，a_{r-1}(不全为0的整数)，

$$a_{n+r}=c_1a_{n+r-1}+c_2a_{n+r-2}+\cdots+c_ra_n(n\geqslant0) \tag{6}$$

$(c_1, c_2, \cdots, c_r$为整数，$c_r\neq0)$的数列$\{a_n\}$的本性数列为$\{b_n\}$：

$$b_0=b_1=\cdots=b_{r-2}=0,\ b_{r-1}=1,$$

$$b_{n+r}=c_1b_{n+r-1}+c_2b_{n+r-2}+\cdots+c_rb_n(n\geqslant0).$$

定义r维列向量(Q'表示Q的转置矩阵)

$$\alpha_n=(a_{n+r-1},\ a_{n+r-2},\ \cdots,\ a_n)',\ n\geqslant0$$

和

$$\beta_n=(b_{n+r-1},\ b_{n+r-2},\ \cdots,\ b_n)',\ n\geqslant0$$

以及r阶方阵

$$A=(\alpha_{r-1},\ \alpha_{r-2},\ \cdots,\ \alpha_0)=\begin{pmatrix} a_{2r-2} & a_{2r-3} & \cdots & a_r & a_{r-1} \\ a_{2r-3} & a_{2r-4} & \cdots & a_{r-1} & a_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_r & a_{r-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

和

$$B=(\beta_{r-1},\ \beta_{r-2},\ \cdots,\ \beta_0)=\begin{pmatrix} b_{2r-2} & b_{2r-3} & \cdots & b_r & 1 \\ b_{2r-3} & b_{2r-4} & \cdots & 1 & \\ \vdots & & \cdots & & \\ & \cdots & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

显然α_n和β_n是满足递推式(6)的.

引理 $\alpha_n=AB^{-1}\beta_n$, $n\geqslant 0$. (这里B^{-1}是B的逆矩阵. 因为$|B|=1\neq 0$, 所以B^{-1}存在)

证 因为

$$A=AE=AB^{-1}B \ (E\text{是单位矩阵}),$$

所以

$$(\alpha_{r-1},\ \alpha_{r-2},\ \cdots,\ \alpha_0)=AB^{-1}\ (\beta_{r-1},\ \beta_{r-2},\ \cdots,\ \beta_0),$$

即有

$$\alpha_0=AB^{-1}\beta_0,\ \alpha_1=AB^{-1}\beta_1,\ \alpha_2=AB^{-1}B_2,\ \cdots,$$
$$\alpha_{r-1}=AB^{-1}\beta-1.$$

我们用数学归纳法证明.

归纳法的奠基显然成立; 假设引理对n, $n+1$, $\cdots$, $n+r-1$成立, 则因α_n和β_n都满足递推式(6), 故有

$$\begin{aligned}\alpha_{n+r}&=c_1\alpha_{n+r-1}+c_2\alpha_{n+r-2}+\cdots+c_{r-1}\alpha_{r+1}+c_r\alpha_n\\&=AB^{-1}(c_1\beta_{n+r-1}+c_2\beta_{n+r-2}+\cdots+c_{r-1}\beta_{n+1}+c_r\alpha_n)\\&=AB^{-1}\beta_{n+r},\end{aligned}$$

即$n+r$时, 引理仍成立. 故对一切非负整数n, 引理成立.

定理 11.3 若$(c_r,\ m)=1$, 且$(|A|,\ m)=1$, 则$\{a_n \pmod m\}$是纯周期数列, 且周期与初始项无关.

证 由定理9.1可知$\{a_n \pmod m\}$是纯周期数列. 下证周期与初始项无关.

设$\{a_n \pmod m\}$和$\{b_n \pmod m\}$的周期分别为T'和T. 由引理

$$\alpha_{n+T} \equiv AB^{-1}\beta_{n+T}$$
$$\equiv AB^{-1}\beta_n \equiv \alpha_n (\bmod m),$$

由α_n的定义可知T是$\{a_n(\bmod m)\}$的一个周期，从而有$T'|T$.

因为 $\alpha_n = AB^{-1}\beta_n$，且记$A^*$为$A$的伴随矩阵（即$A^*A = |A|E$），则有

$$BA^*\alpha_n = BA^*AB^{-1}\beta_n = B\cdot|A|\cdot B^{-1}\beta_n = |A|\beta_n (n \geqslant 0).$$

所以

$$|A|\beta_{n+T'} \equiv BA^*\alpha_{n+T'}$$
$$\equiv BA^*\alpha_n$$
$$\equiv |A|\beta_n (\bmod m).$$

即

$$|A|\beta_{n+T'} \equiv |A|\beta_n (\bmod m).$$

因为

$$(|A|,\ m) = 1,$$

所以

$$\beta_{n+T'} \equiv \beta_n (\bmod m).$$

由β_n的定义可知，T'是$\{b_n(\bmod m)\}$的一个周期，故有$T|T'$.

于是$T = T'$，即$\{a_n(\bmod m)\}$的周期与初始项无关.

上面论证中未作说明地使用了矩阵的同余性质. 整数的许多同余性质对于整数为元素的矩阵仍然成立. 但也有相反的情形，例如，从$AB \equiv 0\ (\bmod p)$，不能推出$A \equiv 0\ (\bmod p)$或$B \equiv 0 (\bmod p)$（这里p为素数，A, B为整数元素的矩阵）. 比较矩阵与整数的同余性质的异同，是一件有趣的事情，我们把这些留给读者.

习 题 二

1. $S_{100}=1^3+2^3+\cdots+99^3+100^3$ 被 7 除后的余数为多少？

2. 设 $S_n=1^n+2^n+3^n+4^n$，求证 $\{S_n(\bmod 10)\}$是纯周期数列，并问当 n 为何值时，$S_n\not\equiv 0(\bmod 10)$

3. 已知 $a_1=1$，$a_2=9$，$a_3=8$，$a_4=5$，$a_{n+4}\equiv a_{n+3}+a_n(\bmod 10)$，$n\geqslant 1$，求证：$a^2_{1985}+a^2_{1986}+\cdots+a^2_{2000}$ 是 4 的倍数.

4. 在十进制数中以如下方式构成一个数

$$x=0.x_1x_2x_3\cdots,$$

而 x_n 是 $x_0+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}$ 被 9 除后所得的最小非负余数，其中 $x_0=1$，试证明 x 是有理数.

5. 求下列两数的末位数.

（1）$67^{67^{67}}$；　（2）$67^{67^{68}}$.

6. 我们知道 $12^2=144$ 的末尾两数均为 4，$38^2=1444$ 的末尾有三个数均为 4．对于个位数不等于零的自然数，它的平方数的末尾相同数的个数最多有多少个？

7. $R_n=\frac{1}{2}(a^n+b^n)$，$a=3+2\sqrt{2}$，$b=3-2\sqrt{2}$，$n=0, 1, 2, \cdots$

则 R_{12345} 是一个整数，它的个位数字是

(A) 1；(B) 3；(C) 5；(D) 7；(E) 9.

8. 设 A 是十进制数 4444^{4444} 的各位数字之和，B 是 A 的各位数字之和，求 B 的各位数字 C.

9. 已知 $a_0=0$，$a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$（$n>1$）．证明

$$2^k\mid a_n\Longleftrightarrow 2^k\mid n.$$

10. 设 $f(x)=x^n$，$n\in\mathrm{N}$ 固定，$x=1, 2, 3, \cdots$，问小数 $a=0.f(1)f(2)f(3)\cdots$ 是否对某一 n 为有理数？

11. 证明：任何 $k\in\mathrm{N}(k\geqslant 2)$，存在无理数 r，使得对任何 $m\in\mathrm{N}$，有

$$[r^m]\equiv -1(\bmod k).$$

12. 已知数列$\{u_n\}$：$u_0=a$，$u_1=b$，$u_2=c$，

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}+u_{n-3}(n\geqslant 3).$$

求证：当 $(a^2+ab+ac-(b+c)^2,\ m)=1$ 时，$\{u_n(\mathrm{mod}\,m)\}$的周期与 a，b，c 无关。

习题答案与提示

习 题 一

1. $a_n=2^{n+1}-2n$.

2. $f(x)=\dfrac{(x+1)^k+(x-1)^k}{(x+1)^k-(x-1)^k}$ $(k\geqslant1,\ k\in \mathrm{N})$,

令$f(x)=x$, $(x+1)(x-1)[(x+1)^{k-1}-(x-1)^{k-1}]=0$. 因为$k$为正奇数，从$[(x+1)^{k-1}-(x-1)^{k-1}]=0$只能解得$x=0$，这与已知不符，故$f(x)$的两不动点为$x=\pm1$.

由已知，

$$a_n=\frac{(a_{n-1}+1)^k+(a_{n-1}-1)^k}{(a_{n-1}+1)^k-(a_{n-1}-1)^k},$$

$$\frac{a_n+1}{a_n-1}=\frac{\dfrac{(a_{n-1}+1)^k+(a_{n-1}-1)^k}{(a_{n-1}+1)^k-(a_{n-1}-1)^k}+1}{\dfrac{(a_{n-1}+1)^k+(a_{n-1}-1)^k}{(a_{n-1}+1)^k-(a_{n-1}-1)^k}-1}=\frac{(a_{n-1}+1)^k}{(a_{n-1}-1)^k},$$

所以

$$\ln\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=k\ln\frac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}-1}.$$

3. 斐波那契数列$\{f_n\}$: $f_0=0, f_1=1, f_n=f_{n-1}+f_{n-2}(n\geqslant2)$的特征方程为$x^2-x-1=0$，特征根$\alpha$, β满足$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$. 通项公式是$f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$.

设$a=2^n$，则有

$$\frac{f_{2^{n+2}}}{f_{2^{n+1}}}-\left(\frac{f_{2^{n+1}}}{f_{2^n}}\right)^2+2$$

$$=\frac{f_{4a}}{f_{2a}}-\left(\frac{f_{2a}}{f_a}\right)^2+2=\frac{\alpha^{4a}-\beta^{4a}}{\alpha^{2a}-\beta^{2a}}-\left(\frac{\alpha^{2a}-\beta^{2a}}{\alpha^a-\beta^a}\right)^2+2$$

$$=\alpha^{2a}+\beta^{2a}-(\alpha^a+\beta^a)^2+2$$

$$=-2(\alpha\beta)^a+2=0,$$

所以 $\left\{\frac{f_{2^{n+1}}}{f_{2^n}}\right\}$ 与$\{a_n\}$有相同的递推关系，且 $a_1=3=\frac{f_4}{f_2}$，初始条件也相同．所以

$$a_n=\frac{f_{2^{n+1}}}{f_{2^n}}.$$

4．证明 $2^{n+1}-2a^2_{n-1}=(2a_n+a_{n-1})^2$．

5．由已知消去 x_{2m}，x_{2m-2}，得

$$x_{2m+1}=4x_{2m-1}-2x_{2m-3}.$$

令 $n=2m-1$，则

$$x_{n+1}=4x_n-2x_{n-1},$$

其中 $x_1=1$，$x_2=3$（即原来的 x_3）．解得

$$x_n=\frac{4+\sqrt{2}}{4}(2+\sqrt{2})^{n-1}+\frac{4\sqrt{2}}{4}(2-\sqrt{2})^{n-1}$$

（$n=2m-1$ 时）．

同理

$$x_n=\frac{2\sqrt{2}+1}{4}(2+\sqrt{2})^n-\frac{2\sqrt{2}-1}{4}(2-\sqrt{2})^n$$

（$n=2m$ 时）．

6．观察数列$\{a_n\}$的前几项：

1，1，3，11，…

我们猜想（或用待定系数法）$a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}(n\geqslant 3)$成立．用数学归纳法证明．

7．假设 T 中有数字 3，则在 S 中存在 i，在第 i 个 0 和第 $i+1$ 个 0 之间有三个 1，由 a_n 的定义可知，存在自然数 N，使 N，$N+1$，$N+2$ 的二进制表示中都有奇数个 1．

假设 $N=a_1 2^{n-1}+a_2 2^{n-2}+\cdots+a_{n-1}2+a_n$，其中 a_1，a_2，…，a_n 中有奇数个 1．

若 $a_n=0$，则 $N+1$ 有偶数个 1，矛盾；若 $a_n=1$，则 $N+1$ 的二进制末位为 0，$N+2$ 有偶数个 1，矛盾．

8．仿照第二节的例 1 证明．

9．设 $P_n\in\{-M,\ -M+1,\ \cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ M-1,\ M\}$，考

察有序数组

$$(P_1, P_2, P_3, P_4), (P_2, P_3, P_4, P_5), \cdots,$$
$$(P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}), \cdots,$$

接下来，可仿照定理2.2证明

10. 考察有序数组

$$(a_0, a_1), (a_1, a_2), \cdots, (a_{n-1}, a_n), \cdots$$

这样的有序数组至多只有 1000^2 个是不同的．

11. (c)．

12. (1) $a_{n+2}=a_n$；(2) $a_{n+3}=a_n$．

13. $a_{1999}=-7$．

14. $\omega=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$，$\omega^2=-1\neq1$，故由定理5·2，当 $P_0=\frac{1}{2}(1-i)(A_2+iA_1)$，即 P_0 为等腰直角三角形 $P_0P_1P_2$ 的顶点时，$\{P_n\}$ 是周期为2的数列．

又因为 $\omega^4=\omega^{2T}=1$，则不论 P_0 的位置如何，$\{P_n\}$ 是周期为4的周期点列．

练 习 二

1. $\{n^3(\text{mod}7)\}$ 是周期为7的纯周期数列，又

$$\sum_{k=1}^{7}k^3\equiv0(\text{mod}7)，所以\ S_{100}\equiv99^3+100^3\equiv2(\text{mod}7).$$

2. $n=4k(k\in N)$ 时，$S_n\not\equiv0(\text{mod}10)$．

3. 仿照第7节例5证明．

4. $x_n\equiv x_0+x_1+\cdots+x_{n-2}+x_{n-1}\equiv x_{n-1}+x_{n-1}=2x_{n-1}(\text{mod}9)$，

$x_n\equiv2x_{n-1}\equiv4x_{n-2}\equiv8x_{n-3}\equiv-x_{n-3}(\text{mod}9)$，

$x_{n+6}\equiv-x_{n+3}\equiv x_n(\text{mod}9)$，

所以 $\{x_n(\text{mod}9)\}$ 是以6为周期的纯周期数列，即 $0.x_1x_2x_3\cdots$ 是有理数．

5. (1) 3；(2) 7．

6. 因为 $\{n^2(\text{mod}10)\}$ 是周期为10的纯周期数列．所以 $n^2(\text{mod}10)\in$

$\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

设任一自然数为 $10a+b$，其中 b 是不超过 9 的自然数，则有

$$(10a+b)^2 \equiv 20ab+b^2 \pmod{100}.$$

并且

$$20ab \equiv 0,\ 20,\ 40,\ 60 \text{ 或 } 80 \pmod{100}$$

(i)如果 $b=1$ 或 9，则 $20ab+b^2 \equiv 1, 21, 41, 61$ 或 $81 \pmod{100}$；
(ii)如果 $b=5$，则 $20ab \equiv 0 \pmod{100}$，$20ab+b^2 \equiv 25 \pmod{100}$；
(iii)如果 $b=3$ 或 7，则 $20ab+b^2 \equiv 9, 29, 49, 69$ 或 $89 \pmod{100}$；
(iv)如果 $b=4$ 或 6，则 $20ab+b^2 = 16, 36, 56, 76$ 或 $96 \pmod{100}$.

以上四种情况，没有一个数的末尾有两个数字相同，因此个位数不为零的自然数平方的末尾重复的数字只能是 4.

假设 x^2 的末尾至少有四个 4．因为

$$10000 \equiv 0 \pmod{16},$$

所以

$$x^2 \equiv 4(10^3+10^2+10+1) \equiv 12 \pmod{16}.$$

又因为

$$(n+8)^2 \equiv n^2 \pmod{16},$$

所以$\{n^2 \pmod{16}\}$是周期为 8 的纯周期数列.又$\{n^2 \pmod{16}\}$的前 8 项为 1，4，9，0，9，4，1，0，…，故 $x^2 \not\equiv 12 \pmod{16}$.
所以 $38^2=1444$ 为所求.

7. (E).

8. $c=7$. 仿照第 7 节例 6．

9. 参见天津《中等数学》1988 年第 5 期.

10. 因为$f(10^k)=10^{kn}$，故 a 中连继 0 的个数可以超过任何给定的自然数，所以 a 是无理数.

11. 设 $b_1=2k$，$b_2=4k^2-2k$，

$$b_{n+2}=2kb_{n+1}-kb_n\ (n \geqslant 1),$$

则 b_n 都是 k 的倍数.

$$b_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n,\ \lambda_1=k+\sqrt{k^2-k},\ \lambda_2=k-\sqrt{k^2-k}.$$

因为 $b_1=\lambda_1+\lambda_2$，$b_2=\lambda_1^2+\lambda_2^2$，所以 $b_n=\lambda_1^n+\lambda_2^n$. 又 $0<\lambda_2<1$，则 $\lambda_1^n=b_n-\lambda_2^n$，$[\lambda_1^n]=[b_n]-1$. 所以

$$[\lambda_1^n]\equiv-1(\mathrm{mod}k).$$

12．$u_n=(b+c)f_{n-2}+af_{n-3}(n\geqslant4)$，其中 $\{f_n\}$ 是斐波那契数列．接下来，仿照第8节例3．